И.Н.БРОНШТЕЙН
К.А.СЕМЕНДЯЕВ

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.11
Б68
УДК 51

Авторы из ГДР, принимавшие участие в подготовке справочника:

P. BECKMANN, M. BELGER, H. BENKER, M. DEWEß, H. ERFURTH, H. GENTEMANN, S. GOTTWALD, P. GÖTHNER, G. GROSCHE, H. HILBIG, R. HOFMANN, H. KÄSTNER, W. PURKERT, J. von SCHEIDT, TH. VETTERMANN, V. WÜNSCH, E. ZEIDLER

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. **Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.** – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

Предыдущее, 12-е издание (1980 г.) вышло с коренной переработкой, произведенной большим коллективом авторов из ГДР, под редакцией Г. Гроше и В. Циглера. В настоящее издание внесены многочисленные исправления.

Для студентов, инженеров, научных работников, преподавателей.

Илья Николаевич Бронштейн
Константин Адольфович Семендяев

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
для инженеров и учащихся втузов

Редактор *А. И. Штерн*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технические редакторы *В. Н. Кондакова, С. Я. Шкляр*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ 12490

Сдано в набор 27.08.85. Подписано к печати 27.05.86. Формат 70 × 100/16. Бумага книжно-журнальная для офсетной печати. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. п. л. 44,2. Усл. кр.-отт. 88,4. Уч.-изд. л. 72,22. Тираж 250000 экз. Заказ 60. Цена 4 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Б $\frac{1702000000-106}{053(02)\text{-}86}$ 47-86

© Издательство «Teubner», ГДР, 1979

© Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1980, с изменениями, 1986

СОДЕРЖАНИЕ

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

4.1. МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ

4.2. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.4. РЯДЫ ФУРЬЕ, ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5.1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

6.3. ТИПИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

7.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

ОТ РЕДАКЦИИ

Справочник И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева по математике для инженеров и студентов втузов прочно завоевал популярность не только в нашей стране, но и за рубежом. Одиннадцатое издание вышло в свет в 1967 г. Дальнейшее издание справочника было приостановлено, так как он уже не отвечал современным требованиям.

Переработка справочника была осуществлена по инициативе издательства «Teubner» с согласия авторов большим коллективом специалистов в ГДР (где до этого справочник выдержал 16 изданий). Было принято обоюдное решение выпустить этот переработанный вариант совместным изданием:

в ГДР – издательством «Teubner» – на немецком языке;

в СССР – Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» – на русском языке.

В результате переработки справочник не только обогатился новыми сведениями по тем разделам математики, которые были представлены ранее, но и был дополнен новыми разделами: «Вариационное исчисление и оптимальное управление» (гл. 3.2), «Математическая логика и теория множеств» (гл. 4.1), «Вычислительная математика» (гл. 7.1), и основными сведениями по вычислительной технике (гл. 7.2).

При этом был сохранен общий методический стиль справочника, позволяющий и получить фактическую справку по отысканию формул или табличных данных, и ознакомиться с основными понятиями (или восстановить их в памяти); для лучшего усвоения понятий приводится большое количество примеров.

В связи со столь основательным пересмотром справочника в ГДР весь текст был заново переведен с немецкого языка.

При подготовке русского издания была произведена некоторая переработка, с тем чтобы по возможности учесть требования программ отечественных вузов. Эта переработка в основном связана с изменением обозначений и терминологии, которые у нас и в ГДР не всегда совпадают. Некоторые разделы для русского издания были переписаны заново – это первые разделы из глав, посвященных алгебре (гл. 2.4), математической логике и теории множеств (гл. 4.1). Менее значительной переделке подверглись разделы, посвященные комплексным переменным (гл. 3.4), вариационному исчислению и оптимальному управлению (гл. 3.2), вычислительной математике (гл. 7.1).

В таком виде справочник вышел в 1980 и в 1981 г.

В настоящем, 13-м (или 2-м переработанном) издании в справочник внесены многочисленные исправления.

Редакция благодарит всех читателей, приславших свои замечания и исправления. С сожалением отмечаем, что таких писем было немного. Основные исправления были внесены по результатам рецензирования и дополнительного редактирования предыдущего издания.

Мы повторяем свою просьбу к читателям присылать замечания в адрес редакции: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, Редакция математических справочников.

1. ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

1.1. ТАБЛИЦЫ

1.1.1. ТАБЛИЦЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.1.1. Некоторые часто встречающиеся постоянные.

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,141593	0,49715	$1:\pi$	0,318310	$\bar{1}$,50285
2π	6,283185	0,79818	$1:2\pi$	0,159155	$\bar{1}$,20182
3π	9,424778	0,97427	$1:3\pi$	0,106103	$\bar{1}$,02573
4π	12,566371	1,09921	$1:4\pi$	0,079577	$\bar{2}$,90079
$\pi:2$	1,570796	0,19612	$2:\pi$	0,636620	$\bar{1}$,80388
$\pi:3$	1,047198	0,02003	$3:\pi$	0,954930	$\bar{1}$,97997
$\pi:4$	0,785398	$\bar{1}$,89509	$4:\pi$	1,273240	0,10491
$\pi:6$	0,523599	$\bar{1}$,71900	$6:\pi$	1,909859	0,28100
$\pi:180$ $(=1°)$	0,017453	$\bar{2}$,24188	$180°:\pi$	57°,295780	1,75812
$\pi:10800$ $(=1')$	0,000291	$\bar{4}$,46373	$10800':\pi$	3437',7468	3,53627
$\pi:648000$ $(=1'')$	0,000005	$\bar{6}$,68557	$648000'':\pi$	206264'',81	5,31443
π^2	9,869604	0,99430	$1:\pi^2$	0,101321	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,564190	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,398942	$\bar{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	$\bar{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,682784	$\bar{1}$,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,620350	$\bar{1}$,79264
e	2,718282	0,43429	$1:e$	0,367879	$\bar{1}$,56571
e^2	7,389056	0,86859	$1:e^2$	0,135335	$\bar{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,606531	$\bar{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,716532	$\bar{1}$,85524
$e^{\pi:2}$	4,810477	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,207880	$\bar{1}$,31781
e^{π}	23,140693	1,36438	$e^{-\pi}$	0,043214	$\bar{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,491656	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,001867	$\bar{3}$,27125
C*)	0,577216	$\bar{1}$,76134	$\ln\pi$	1,144730	0,05870
$M=\lg e$	0,434294	$\bar{1}$,63778	$1:M=\ln 10$	2,302585	0,36222
g**)	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

*) C – постоянная Эйлера.
**) g – ускорение свободного падения (м/с^2); здесь дано округленное значение g на уровне моря на широте 45–50°.

Интерполяция. Большинство помещенных ниже таблиц дает значения функций с четырьмя значащими цифрами для трехзначных аргументов. Когда аргумент задан с большей точностью и, следовательно, искомое значение функции не может быть найдено непосредственно в таблицах, необходимо прибегать к интерполяции. Наиболее простой является линейная интерполяция, при которой допускают, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Если заданное значение x лежит между приведенными в таблице значениями x_0 и $x_1 = x_0 + h$, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$, то принимают

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta.$$

Интерполяционная поправка $\frac{x - x_0}{h}\Delta$ легко вычисляется с помощью таблицы пропорциональных частей 1.1.1.17.

Примеры. 1) Найти $1{,}6754^2$. В таблицах находим: $1{,}67^2 = 2{,}789$ и $1{,}68^2 = 2{,}822$; тогда $\Delta = 33$*). Из таблицы пропорциональных частей получаем: $0{,}5 \cdot 33 = 16{,}5$; $0{,}04 \cdot 33 = 1{,}3$; $\frac{x - x_0}{h}\Delta = 16{,}5 + 1{,}3 \approx 18$; $1{,}6754^2 = 2{,}807$.

2) Найти $\operatorname{tg} 79°24'$. В таблицах находим: $\operatorname{tg} 79°20' = 5{,}309$ и $\operatorname{tg} 79°30' = 5{,}396$; тогда $\Delta = 87$; $0{,}4 \cdot 87 \approx 35$; $\operatorname{tg} 79°24' = 5{,}344$.

Погрешность линейной интерполяции не превышает единицы последней значащей цифры, если только две соседние разности Δ_0 и Δ_1 **) различаются не больше чем на 4 единицы (последнего знака). Если это условие не выполнено, необходимо пользоваться более сложными интерполяционными формулами. В большинстве случаев достаточной является *квадратичная интерполяция* по Бесселю:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

$$k = \frac{x - x_0}{h};$$

$$k_1 = \frac{k(1-k)}{4};$$

k_1 находится из табл. 1.1.1.18.

Пример. Требуется найти $\operatorname{tg} 85°33'$. По таблице находим ($h = 10'$): $k = 0{,}3$, $k_1 = 0{,}052$; поправка равна $0{,}3 \cdot 491 - 0{,}052 \cdot 75 \approx 143$; $\operatorname{tg} 85°33' = 12{,}849$.

1.1.1.2. Квадраты, кубы, корни.

Объяснения к таблице. Таблица позволяет находить квадраты, кубы, квадратные и кубические корни с четырьмя значащими цифрами. Для аргументов n, заключенных между 1 и 10, величины n^2, n^3 находятся непосредственно из таблицы, если значение аргумента дано с тремя значащими цифрами. Например, $1{,}79^2 = 3{,}204$. Если же значение аргумента задано более чем тремя значащими цифрами, необходимо прибегнуть к интерполяции. Для этой таблицы погрешность линейной интерполяции нигде не превышает единицы последнего знака.

Для нахождения n^2, n^3 при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при увеличении n в 10^k раз n^2 увеличивается в 10^{2k} раз, n^3 – в 10^{3k} раз, т. е. перенос запятых у n на k разрядов вправо вызывает перенос запятых у n^2 на $2k$ разрядов вправо. При этом по мере надобности к взятому из таблиц числу приписываются нули справа или слева. Например, $0{,}179^2 = 0{,}03204$; $179^3 = 5\,735\,000$*).

Корни квадратные для n, заключенных между 1 и 100, могут быть найдены непосредственно из таблицы (с применением линейной интерполяции), а для любых n – по следующим правилам.

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по две цифры. 2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей грань одну или две значащие цифры, значение корня находят в таблице соответственно в графе $\sqrt{n}$ или $\sqrt{10n}$. 3) В найденном значении корня запятую ставят, исходя из того, что каждая грань подкоренного числа, стоящая до запятой, дает для корня одну цифру до запятой, а для чисел, меньших 1, каждая состоящая из нулей грань после запятой дает для корня один нуль после запятой.

Примеры. 1) $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$; 2) $\sqrt{23'90'00} = 488{,}9$; 3) $\sqrt{0{,}00'02'39} = 0{,}01546$; 4) $\sqrt{0{,}00'3} = 0{,}05477$. (В последнем примере под знаком корня на конце нужно мысленно добавить один нуль, т. е. дополнить последнюю грань, и корень следует искать в графе $\sqrt{10n}$.)

Корни кубические для n, заключенных между 1 и 1000, могут быть найдены непосредственно из таблицы (с применением линейной интерполяции), а для любых n – по следующим правилам.

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по три цифры. 2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей грань одну, две или три значащие цифры, значение корня находят в таблице соответственно в графе $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ или $\sqrt[3]{100n}$. 3) В найденном значении корня запятую ставят по тому же правилу, что и для квадратных корней.

Примеры. 1) $\sqrt[3]{23{,}9} = 2{,}880$**); 2) $\sqrt[3]{239'000} = 62{,}06$; 3) $\sqrt[3]{0{,}000'002'39} = 0{,}01337$; 4) $\sqrt[3]{0{,}000'3} = 0{,}06694$; 5) $\sqrt[3]{0{,}03} = 0{,}3107$. (В последних двух примерах под знаком корня на конце нужно мысленно добавить соответственно два нуля и один нуль, т. е. дополнить соответствующую грань.)

---

*) Разность Δ и поправку обычно выражают в единицах разряда последней значащей цифры, не выписывая нулей и запятой впереди.

**) Здесь подразумеваются обозначения: $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_{-1} = x_0 - h$, $y_k = f(x_k)$ $(k = -1, 0, 1, 2)$, $\Delta_0 = y_1 - y_0$, $\Delta_1 = y_2 - y_1$, $\Delta_{-1} = y_0 - y_{-1}$.

*) Лучше записать $179^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, избегая употребления нулей для замены неизвестных цифр (точно: $179^3 = 5\,735\,339$).

**) Нуль на конце нужно сохранить, так как здесь он является значащей цифрой и характеризует точность полученного значения корня.

Квадраты, кубы, квадратные и кубические корни

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3.049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2,525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41.06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16,65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	3,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199.2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,462	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7,54	56,85	428,7	2,746	8,683	1,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,009	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

1.1.1.3. Степени целых чисел от 1 до 100.

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	750 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424

Продолжение

n	n^2	n^3	n^4	n^5
35	1 225	42875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

1.1.1.4. Обратные величины.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431

Продолжение

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Объяснения к таблице обратных величин. В таблице 1.1.1.4 даны с четырьмя знаками значения величин $10\,000:n$ для трехзначных аргументов, заключенных между 1 и 10. Каждое число в таблице помещено в строке, соответствующей первым двум значащим цифрам аргумента (указанным в столбце n), и в столбце, соответствующем третьей цифре аргумента. Например, $10\,000:2{,}26 = 4425$. Если аргумент дан с четырьмя знаками, то необходимо прибегнуть к линейной интерполяции. Следует обратить внимание на то, что здесь интерполяционные поправки не прибавляются, а вычитаются.

Помещенные в таблице числа можно рассматривать как десятичные знаки, следующие за запятой в дроби $1:n$; например, $1:2{,}26 = 0{,}4425$. Для нахождения $1:n$ при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при умножении n на 10^k величина $1:n$ умножается на 10^{-k}, т. е. перенос запятой у n на k разрядов вправо вызывает перенос запятой у $1:n$ на k разрядов влево и наоборот. Например, $1:22{,}6 = 0{,}04425$ и $1:0{,}0226 = 44{,}25$.

1.1.1.5. Факториалы и обратные им величины.

Факториалы.

n	n!	n	n!
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

Величины, обратные факториалам*)

n	$1:n!$	n	$1:n!$	n	$1:n!$
1	1,000000	11	$0{,}0^{7}25052$	21	$0{,}0^{19}19573$
2	0,500000	12	$0{,}0^{8}20877$	22	$0{,}0^{21}88968$
3	0,166667	13	$0{,}0^{9}16059$	23	$0{,}0^{22}38682$
4	0,041667	14	$0{,}0^{10}11471$	24	$0{,}0^{23}16117$
5	$0{,}0^{2}83333$	15	$0{,}0^{12}76472$	25	$0{,}0^{25}64470$
6	$0{,}0^{2}13889$	16	$0{,}0^{13}47795$	26	$0{,}0^{26}24796$
7	$0{,}0^{3}19841$	17	$0{,}0^{14}28115$	27	$0{,}0^{28}91837$
8	$0{,}0^{4}24802$	18	$0{,}0^{15}15619$	28	$0{,}0^{29}32799$
9	$0{,}0^{5}27557$	19	$0{,}0^{17}82206$	29	$0{,}0^{30}11310$
10	$0{,}0^{6}27557$	20	$0{,}0^{18}41103$	30	$0{,}0^{32}37700$

*) Для $1:n!$ применена сокращенная запись нулей после запятой. Так, для $1:8!$ вместо 0,000024802 написано $0{,}0^{4}24802$.

1.1.1.6. Некоторые степени чисел 2, 3 и 5.

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

1.1.1.7. Десятичные логарифмы.

Объяснения к таблицам логарифмов и антилогарифмов. Таблица 1.1.1.7 служит для нахождения десятичных логарифмов чисел. Сначала для данного числа находится *характеристика* его логарифма, а затем *мантисса* из таблицы. Для трехзначных чисел мантисса находится на пересечении строки, в начале которой (графа N) стоят две первые цифры данного числа, и столбца, соответствующего третьей цифре нашего числа. Если заданное число имеет больше трех значащих цифр, необходимо применить линейную интерполяцию. При этом интерполяционная поправка находится только на четвертую значащую цифру числа; поправку на пятую цифру имеет смысл делать только тогда, когда первая значащая цифра данного числа равна 1 или 2.

Пример. $\lg 254{,}3 = 2{,}4053$ (к 4048 нужно прибавить $0{,}3\cdot 17 = 5{,}1$).

Для нахождения числа по его десятичному логарифму служит таблица 1.1.1.8 (таблица антилогарифмов)*). Аргументом в этой таблице является мантисса заданного логарифма. На пересечении строки, которая определяется первыми двумя цифрами мантиссы (графа m), и столбца, соответствующего третьей цифре мантиссы, в таблице антилогарифмов находится цифровой состав искомого числа. На четвертую цифру мантиссы должна быть внесена интерполяционная поправка. Характеристика логарифма позволяет поставить в полученном результате запятую.

Примеры. $\lg x = 1{,}2763$; $x = 18{,}89$ (к найденному в таблице значению 1888 прибавляется $0{,}3\cdot 4 = 1{,}2$; в полученном результате отделяются запятой два знака, так как характеристика равна единице). Если $\lg x = \bar{2}{,}2763$, то $x = 0{,}01889$. Эти результаты могут быть записаны также следующим образом: $10^{1,2763} = 18{,}89$; $10^{-1,7237} = 0{,}01889$ (так как $\bar{2}{,}2763 = -1{,}7237$).

*) Число y, десятичный логарифм которого равен x, называют *антилогарифмом* x. Согласно определению логарифма, эта функция совпадает с показательной функцией $y = 10^x$.

Десятичные логарифмы

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9523	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

1.1.1.8. Антилогарифмы.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

Продолжение

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

1.1.1.9. Натуральные значения тригонометрических функций.
Угловой радиус разделен на шесть частей: шаг 10′.)

СИНУСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0223	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2519	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОСИНУСЫ

СИНУСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8936	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОСИНУСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	75
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОТАНГЕНСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	40
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,394	1,402	1,411	1,419	1,428	35
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	33
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	30
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	1,963	27
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	25
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	20
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	15
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	10
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	8
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	7
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	5
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОТАНГЕНСЫ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (ШАГ 0,1°)

СИНУСЫ

Градусы		Градусы										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0436	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87
3	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86
4	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85
5	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84
6	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83
7	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82
8	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81
9	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80
10	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1957	0,1874	0,1891	0,1908	79
11	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78
12	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77
13	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76
14	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75
15	0,2588	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74
16	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73
17	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72
18	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71
19	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70
20	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69
21	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68
22	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67
23	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66
24	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65
25	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64
26	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63
27	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62
28	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61
29	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60
30	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59
31	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58
32	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57
33	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56
34	0,5592	0,5606	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55
35	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54
36	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53
37	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52
38	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,6225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51
39	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6247	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50
40	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49
41	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48
42	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47
43	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46
44	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОСИНУСЫ

СИНУСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
46	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43
47	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42
48	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41
49	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40
50	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39
51	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38
52	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37
53	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,8049	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36
54	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35
55	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34
56	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33
57	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32
58	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31
59	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30
60	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29
61	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28
62	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27
63	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8972	0,8980	0,8988	26
64	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25
65	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24
66	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23
67	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22
68	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21
69	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20
70	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19
71	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,9483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18
72	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17
73	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16
74	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15
75	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14
76	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13
77	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12
78	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11
79	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10
80	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9
81	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9888	0,9900	0,9903	8
82	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7
83	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6
84	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5
85	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОСИНУСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0344	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0367	0,0384	0,0402	0,0419	0,0437	0,0454	0,0472	0,0489	0,0507	0,0524	87
3	0,0524	0,0542	0,0559	0,0577	0,0594	0,0612	0,0629	0,0647	0,0664	0,0682	0,0699	86
4	0,0699	0,0717	0,0734	0,0752	0,0769	0,0787	0,0805	0,0822	0,0840	0,0857	0,0875	85
5	0,0875	0,0892	0,0910	0,0928	0,0945	0,0963	0,0981	0,0998	0,1016	0,1033	0,1051	84
6	0,1051	0,1069	0,1086	0,1104	0,1122	0,1139	0,1157	0,1175	0,1192	0,1210	0,1228	83
7	0,1228	0,1246	0,1263	0,1281	0,1299	0,1317	0,1334	0,1352	0,1370	0,1388	0,1405	82
8	0,1405	0,1423	0,1441	0,1459	0,1477	0,1495	0,1512	0,1530	0,1548	0,1566	0,1584	81
9	0,1584	0,1602	0,1620	0,1638	0,1655	0,1673	0,1691	0,1709	0,1727	0,1745	0,1763	80
10	0,1763	0,1781	0,1799	0,1817	0,1835	0,1853	0,1871	0,1890	0,1908	0,1926	0,1944	79
11	0,1944	0,1962	0,1980	0,1998	0,2016	0,2035	0,2053	0,2071	0,2089	0,2107	0,2126	78
12	0,2126	0,2144	0,2162	0,2180	0,2199	0,2217	0,2235	0,2254	0,2272	0,2290	0,2309	77
13	0,2309	0,2327	0,2345	0,2364	0,2382	0,2401	0,2419	0,2438	0,2456	0,2475	0,2493	76
14	0,2493	0,2512	0,2530	0,2549	0,2568	0,2586	0,2605	0,2623	0,2642	0,2661	0,2679	75
15	0,2679	0,2698	0,2717	0,2736	0,2754	0,2773	0,2792	0,2811	0,2830	0,2849	0,2867	74
16	0,2867	0,2886	0,2905	0,2924	0,2943	0,2962	0,2981	0,3000	0,3010	0,3038	0,3057	73
17	0,3057	0,3076	0,3096	0,3115	0,3134	0,3153	0,3172	0,3191	0,3211	0,3230	0,3249	72
18	0,3249	0,3269	0,3288	0,3307	0,3327	0,3346	0,3365	0,3385	0,3404	0,3424	0,3443	71
19	0,3443	0,3463	0,3482	0,3502	0,3522	0,3541	0,3561	0,3581	0,3600	0,3620	0,3640	70
20	0,3640	0,3659	0,3679	0,3699	0,3719	0,3739	0,3759	0,3779	0,3799	0,3819	0,3839	69
21	0,3839	0,3859	0,3879	0,3899	0,3919	0,3939	0,3959	0,3979	0,4000	0,4020	0,4040	68
22	0,4040	0,4061	0,4081	0,4101	0,4122	0,4142	0,4163	0,4183	0,4204	0,4224	0,4245	67
23	0,4245	0,4265	0,4286	0,4307	0,4327	0,4348	0,4369	0,4390	0,4411	0,4431	0,4452	66
24	0,4452	0,4473	0,4494	0,4515	0,4536	0,4557	0,4578	0,4599	0,4621	0,4642	0,4663	65
25	0,4663	0,4684	0,4706	0,4727	0,4748	0,4770	0,4791	0,4813	0,4834	0,4856	0,4877	64
26	0,4877	0,4899	0,4921	0,4942	0,4964	0,4986	0,5008	0,5029	0,5051	0,5073	0,5095	63
27	0,5095	0,5117	0,5139	0,5161	0,5184	0,5206	0,5228	0,5250	0,5272	0,5295	0,5317	62
28	0,5317	0,5340	0,5362	0,5384	0,5407	0,5430	0,5452	0,5475	0,5498	0,5520	0,5543	61
29	0,5543	0,5566	0,5589	0,5612	0,5635	0,5658	0,5681	0,5704	0,5727	0,5750	0,5774	60
30	0,5774	0,5797	0,5820	0,5844	0,5867	0,5890	0,5914	0,5938	0,5961	0,5985	0,6009	59
31	0,6009	0,6032	0,6056	0,6080	0,6104	0,6128	0,6152	0,6176	0,6200	0,6224	0,6249	58
32	0,6249	0,6273	0,6297	0,6322	0,6346	0,6371	0,6395	0,6420	0,6445	0,6469	0,6494	57
33	0,6494	0,6519	0,6544	0,6569	0,6594	0,6619	0,6644	0,6669	0,6694	0,6720	0,6745	56
34	0,6745	0,6771	0,6796	0,6822	0,6847	0,6873	0,6899	0,6924	0,6950	0,6976	0,7002	55
35	0,7002	0,7028	0,7054	0,7080	0,7107	0,7133	0,7159	0,7186	0,7212	0,7239	0,7265	54
36	0,7265	0,7292	0,7319	0,7346	0,7373	0,7400	0,7427	0,7454	0,7481	0,7508	0,7536	53
37	0,7536	0,7563	0,7590	0,7618	0,7646	0,7673	0,7701	0,7729	0,7757	0,7785	0,7813	52
38	0,7813	0,7841	0,7869	0,7898	0,7926	0,7954	0,7983	0,8012	0,8040	0,8069	0,8098	51
39	0,8098	0,8127	0,8156	0,8185	0,8214	0,8243	0,8273	0,8302	0,8332	0,8361	0,8391	50
40	0,8391	0,8421	0,8451	0,8481	0,8511	0,8541	0,8571	0,8601	0,8632	0,8662	0,8693	49
41	0,8693	0,8724	0,8754	0,8785	0,8816	0,8847	0,8878	0,8910	0,8941	0,8972	0,9004	48
42	0,9004	0,9036	0,9067	0,9099	0,9131	0,9163	0,9195	0,9228	0,9260	0,9293	0,9325	47
43	0,9325	0,9358	0,9391	0,9424	0,9457	0,9490	0,9523	0,9556	0,9590	0,9623	0,9657	46
44	0,9657	0,9691	0,9725	0,9759	0,9793	0,9827	0,9861	0,9896	0,9930	0,9965	1,0000	45
45	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОТАНГЕНСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
45	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44
46	1,0355	1,0392	1,0428	1,0464	1,0501	1,0538	1,0575	1,0612	1,0649	1,0686	1,0724	43
47	1,0724	1,0761	1,0799	1,0637	1,0875	1,0913	1,0951	1,0990	1,1028	1,1067	1,1106	42
48	1,1106	1,1145	1,1184	1,1224	1,1263	1,1303	1,1343	1,1383	1,1423	1,1463	1,1504	41
49	1,1504	1,1544	1,1585	1,1626	1,1667	1,1708	1,1750	1,1792	1,1833	1,1875	1,1918	40
50	1,1918	1,1960	1,2002	1,2045	1,2088	1,2131	1,2174	1,2218	1,2261	1,2305	1,2349	39
51	1,2349	1,2393	1,2437	1,2483	1,2527	1,2572	1,2617	1,2662	1,2708	1,2753	1,2799	38
52	1,2799	1,2846	1,2892	1,2938	1,2985	1,3032	1,3079	1,3127	1,3175	1,3222	1,3270	37
53	1,3270	1,3319	1,3367	1,3416	1,3465	1,3514	1,3564	1,3613	1,3663	1,3713	1,3764	36
54	1,3764	1,3814	1,3865	1,3916	1,3968	1,4019	1,4071	1,4124	1,4176	1,4229	1,4281	35
55	1,4281	1,4335	1,4388	1,4442	1,4496	1,4550	1,4605	1,4659	1,4715	1,4770	1,4826	34
56	1,4826	1,4882	1,4938	1,4994	1,5051	1,5108	1,5166	1,5224	1,5282	1,5340	1,5399	33
57	1,5399	1,5458	1,5517	1,5577	1,5637	1,5697	1,5757	1,5818	1,5880	1,5941	1,6003	32
58	1,6003	1,6066	1,6128	1,6191	1,6255	1,6319	1,6383	1,6447	1,6512	1,6577	1,6643	31
59	1,6643	1,6709	1,6725	1,6842	1,6909	1,6977	1,7045	1,7113	1,7182	1,7251	1,7321	30
60	1,7321	1,7391	1,7461	1,7532	1,7603	1,7675	1,7747	1,7820	1,7893	1,7966	1,8040	29
61	1,8040	1,8115	1,8190	1,8265	1,8341	1,8418	1,8495	1,8572	1,8650	1,8728	1,8807	28
62	1,8807	1,8887	1,8967	1,9047	1,9128	1,9210	1,9292	1,9375	1,9458	1,9542	1,9626	27
63	1,9626	1,9711	1,9797	1,9883	1,9970	2,0057	2,0145	2,0233	2,0323	2,0413	2,0503	26
64	2,0503	2,0594	2,0686	2,0778	2,0872	2,0965	2,1060	2,1155	2,1251	2,1348	2,1445	25
65	2,1445	2,1543	2,1642	2,1742	2,1842	2,1943	2,2045	2,2148	2,2251	2,2355	2,2460	24
66	2,2460	2,2566	2,2673	2,2781	2,2889	2,2998	2,3109	2,3220	2,3332	2,3445	2,3559	23
67	2,3555	2,3673	2,3798	2,3906	2,4023	2,4142	2,4262	2,4383	2,4504	2,4627	2,4751	22
68	2,4751	2,4876	2,5002	2,5129	2,5257	2,5386	2,5517	2,5649	2,5782	2,5916	2,6051	21
69	2,6051	2,6187	2,6325	2,6464	2,6605	2,6746	2,6889	2,7034	2,7179	2,7326	2,7475	20
70	2,7475	2,7625	2,7776	2,7927	2,8083	2,8239	2,8397	2,8556	2,8716	2,8878	2,9042	19
71	2,9042	2,9208	2,9375	2,9544	2,9714	2,9887	3,0061	3,0237	3,0415	3,0595	3,0777	18
72	3,0777	3,0961	3,1146	3,1334	3,1524	3,1716	3,1910	3,2106	3,2305	3,2506	3,2709	17
73	3,2709	3,2914	3,3122	3,3332	3,3544	3,3759	3,3977	3,4197	3,4420	3,4646	3,4874	16
74	3,4874	3,5105	3,5329	3,5576	3,5816	3,6059	3,6305	3,6554	3,6806	3,7062	3,7321	15
75	3,7321	3,7583	3,7848	3,8118	3,8391	3,8667	3,8947	3,9232	3.9520	3,9812	4,0108	14
76	4,0108	4,0408	4,0713	4,1022	4,1335	4,1653	4,1976	4,2303	4,2635	4,2972	4,3315	13
77	4,3315	4,3662	4,4015	4,4373	4,4737	4,5107	4,5483	4,5864	4,6252	4,6646	4,7046	12
78	4,7046	4,7453	4,7867	4,8288	4,8716	4,9152	4,9594	5,0045	5,0504	5,0970	5,1446	11
79	3,1446	5,1929	5,2422	5,2924	5,3435	5,3955	5,4486	5,5026	5,5578	5,6140	5,6713	10
80	5,6713	5,7297	5,7894	5,8502	5,9124	5,9758	6,0405	6,1066	6,1742	6,2432	6,3138	9
81	6,3138	6,3859	6,4596	6,5350	6,6122	6,6912	6,7720	6,8548	6,9395	7,0264	7,1154	8
82	7,1154	7,2066	7,3002	7,3962	7,4947	7,5958	7,6996	7,8062	7,9158	8,0285	8,1443	7
83	8,1443	8,2636	8,3863	8,5126	8,6427	8,7769	8,9152	9,0579	9,2052	9,3572	9,5144	6
84	9,5144	9,6768	9,8448	10,0187	10,1988	10,3854	10,5789	10,7797	10,9882	11,2048	11,4301	5
85	11,4301	11,6645	11,9087	12,1632	12,4288	12,7062	12,9962	13,2996	13,6174	13,9507	14,3007	4
86	14,3007	14,6685	15,0557	15,4638	15,8945	16,3499	16,8319	17,3432	17,8863	18,4645	19,0811	3
87	19,0811	19,7403	20,4465	21,2049	22,0217	22,9038	23,8593	24,8978	26,0307	27,2715	28,6363	2
88	28,6363	30,1446	31,8205	33,6935	35,8006	38,1885	40,9174	44,0661	47,7395	52,0807	57,2900	1
89	57,2900	63,6567	71,6151	81,8470	95,4895	114,5887	143,2371	190,9842	296,4777	572,9572	∞	0
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОТАНГЕНСЫ

1.1.1.10. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции (для x от 0 до 1,6).

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4539	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3,3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	−0,0092	−108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	−0,0192	−52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292	−34,233

Кратные значения π и π/2 для вычисления тригонометрических функций при $x > 1,6$

n	$n \cdot \pi/2$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \pi/2$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Примеры. 1) $\sin 7{,}5 = \sin(5\pi/2 - 0{,}35398) = \cos 0{,}35398 = 0{,}9380$ (линейная интерполяция). 2) $\sin 29 = \sin(9\pi + 0{,}72567) = -\sin 0{,}72567 = -0{,}6637$ (линейная интерполяция).

1.1.1.11. Показательные функции (для x от 1,6 до 10,0)*).

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	1,95	7,0287	0,1423	2,30	9,9742	0,10026
1,61	5,0028	0,1999	1,96	7,0993	0,1409	2,31	10,074	0,09926
1,62	5,0531	0,1979	1,97	7,1707	0,1395	2,32	10,176	0,09827
1,63	5,1039	0,1959	1,98	7,2427	0,1381	2,33	10,278	0,09730
1,64	5,1552	0,1940	1,99	7,3155	0,1367	2,34	10,381	0,09633
1,65	5,2070	0,1920	2,00	7,3891	0,1353	2,35	10,486	0,09537
1,66	5,2593	0,1901	2,01	7,4633	0,1340	2,36	10,591	0,09442
1,67	5,3122	0,1882	2,02	7,5383	0,1327	2,37	10,697	0,09348
1,68	5,3656	0,1864	2,03	7,6141	0,1313	2,38	10,805	0,09255
1,69	5,4195	0,1845	2,04	7,6906	0,1300	2,39	10,913	0,09163
1,70	5,4739	0,1827	2,05	7,7679	0,1287	2,40	11,023	0,09072
1,71	5,5290	0,1809	2,06	7,8460	0,1275	2,41	11,134	0,08982
1,72	5,5845	0,1791	2,07	7,9248	0,1262	2,42	11,246	0,08892
1,73	5,6407	0,1773	2,08	8,0045	0,1249	2,43	11,359	0,08804
1,74	5,6973	0,1755	2,09	8,0849	0,1237	2,44	11,473	0,08716
1,75	5,7546	0,1738	2,10	8,1662	0,1225	2,45	11,588	0,08629
1,76	5,8124	0,1720	2,11	8,2482	0,1212	2,46	11,705	0,08543
1,77	5,8709	0,1703	2,12	8,3311	0,1200	2,47	11,822	0,08458
1,78	5,9299	0,1686	2,13	8,4149	0,1188	2,48	11,941	0,08374
1,79	5,9895	0,1670	2,14	8,4994	0,1177	2,49	12,061	0,08291
1,80	6,0496	0,1653	2,15	8,5849	0,1165	2,50	12,182	0,08208
1,81	6,1104	0,1637	2,16	8,6711	0,1153	2,51	12,305	0,08127
1,82	6,1719	0,1620	2,17	8,7583	0,1142	2,52	12,429	0,08046
1,83	6,2339	0,1604	2,18	8,8463	0,1130	2,53	12,554	0,07966
1,84	6,2965	0,1588	2,19	8,9352	0,1119	2,54	12,680	0,07887
1,85	6,3598	0,1572	2,20	9,0250	0,1108	2,55	12,807	0,07808
1,86	6,4237	0,1557	2,21	9,1157	0,1097	2,56	12,936	0,07730
1,87	6,4883	0,1541	2,22	9,2073	0,1086	2,57	13,066	0,07654
1,88	6,5535	0,1526	2,23	9,2999	0,1075	2,58	13,197	0,07577
1,89	6,6194	0,1511	2,24	9,3933	0,1065	2,59	13,330	0,07502
1,90	6,6859	0,1496	2,25	9,4877	0,1054	2,60	13,464	0,07427
1,91	6,7531	0,1481	2,26	9,5831	0,1044	2,61	13,599	0,07353
1,92	6,8210	0,1466	2,27	9,6794	0,1033	2,62	13,736	0,07280
1,93	6,8895	0,1451	2,28	9,7767	0,1023	2,63	13,874	0,07208
1,94	6,9588	0,1437	2,29	9,8749	0,1013	2,64	14,013	0,07136

*) Для вычисления гиперболических функций при $x > 1,6$ можно пользоваться следующими формулами:
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}2x$.

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,65	14,154	0,07065	3,25	25,790	0,03877	3,85	46,993	0,02128
2,66	14,296	0,06995	3,26	26,050	0,03839	3,86	47,465	0,02107
2,67	14,440	0,06925	3,27	26,311	0,03801	3,87	47,942	0,02086
2,68	14,585	0,06856	3,28	26,576	0,03763	3,88	48,424	0,02065
2,69	14,732	0,06788	3,29	26,843	0,03725	3,89	48,911	0,02045
2,70	14,880	0,06721	3,30	27,113	0,03688	3,90	409,402	0,02024
2,71	15,029	0,06654	3,31	27,385	0,03652	3,91	49,899	0,02004
2,72	15,180	0,06588	3,32	27,660	0,03615	3,92	50,400	0,01984
2,73	15,333	0,06522	3,33	27,938	0,03579	3,93	50,907	0,01964
2,74	15,487	0,06457	3,34	28,219	0,03544	3,94	51,419	0,01945
2,75	15,643	0,06393	3,35	28,503	0,03508	3,95	51,935	0,01925
2,76	15,800	0,06329	3,36	28,789	0,03474	3,96	52,457	0,01906
2,77	15,959	0,06266	3,37	29,079	0,03439	3,97	52,985	0,01887
2,78	16,119	0,06204	3,38	29,371	0,03405	3,98	53,517	0,01869
2,79	16,281	0,06142	3,39	29,666	0,03371	3,99	54,055	0,01850
2,80	16,445	0,06081	3,40	29,964	0,03337	4,0	54,598	0,01832
2,81	16,610	0,06020	3,41	30,265	0,03304	4,1	60,340	0,01657
2,82	16,777	0,05961	3,42	30,569	0,03271	4,2	66,686	0,01500
2,83	16,945	0,05901	3,43	30,877	0,03239	4,3	73,700	0,01357
2,84	17,116	0,05843	3,44	31,187	0,03206	4,4	81,451	0,01228
2,85	17,288	0,05784	3,45	31,500	0,03175	4,5	90,017	0,01111
2,86	17,462	0,05727	3,46	31,817	0,03143	4,6	99,484	0,01005
2,87	17,637	0,05670	3,47	32,137	0,03112	4,7	109,95	0,00910
2,88	17,814	0,05613	3,48	32,460	0,03081	4,8	121,51	0,00823
2,89	17,993	0,05558	3,49	32,786	0,03050	4,9	134,29	0,00745
2,90	18,174	0,05502	3,50	33,115	0,03020	5,0	148,41	0,00674
2,91	18,357	0,05448	3,51	33,448	0,02990	5,1	164,02	0,00610
2,92	18,541	0,05393	3,52	33,784	0,02960	5,2	181,27	0,00552
2,93	18,728	0,05340	3,53	34,124	0,02930	5,3	200,34	0,00499
2,94	18,916	0,05287	3,54	34,467	0,02901	5,4	221,41	0,00452
2,95	19,106	0,05234	3,55	34,813	0,02872	5,5	244,69	0,00409
2,96	19,298	0,05182	3,56	35,163	0,02844	5,6	270,43	0,00370
2,97	19,492	0,05130	3,57	35,517	0,02816	5,7	298,87	0,00335
2,98	19,688	0,05079	3,58	35,874	0,02788	5,8	330,30	0,00303
2,99	19,886	0,05029	3,59	36,234	0,02760	5,9	365,04	0,00274
3,00	20,086	0,04979	3,60	36,598	0,02732	6,0	403,43	0,002479
3,01	20,287	0,04929	3,61	36,966	0,02705	6,1	445,86	0,002243
3,02	20,491	0,04880	3,62	37,338	0,02678	6,2	492,75	0,002029
3,03	20,697	0,04832	3,63	37,713	0,02652	6,3	544,57	0,001836
3,04	20,905	0,04783	3,64	38,092	0,02625	6,4	601,85	0,001662
3,05	21,115	0,04736	3,65	38,475	0,02599	6,5	665,14	0,001503
3,06	21,328	0,04689	3,66	38,861	0,02573	6,6	735,10	0,001360
3,07	21,542	0,04642	3,67	39,252	0,02548	6,7	812,41	0,001231
3,08	21,758	0,04596	3,68	39,646	0,02522	6,8	897,85	0,001114
3,09	21,977	0,04550	3,69	40,045	0,02497	6,9	992,27	0,001008
3,10	22,198	0,04505	3,70	40,447	0,02472	7,0	1096,6	0,000912
3,11	22,421	0,04460	3,71	40,854	0,02448	7,1	1212,0	0,000825
3,12	22,646	0,04416	3,72	41,264	0,02423	7,2	1339,4	0,000747
3,13	22,874	0,04372	3,73	41,679	0,02399	7,3	1480,3	0,000676
3,14	23,104	0,04328	3,74	42,098	0,02375	7,4	1636,0	0,000611
3,15	23,336	0,04285	3,75	42,521	0,02352	7,5	1808,0	0,000553
3,16	23,571	0,04243	3,76	42,948	0,02328	7,6	1998,2	0,000500
3,17	23,807	0,04200	3,77	43,380	0,02305	7,7	2208,3	0,000453
3,18	24,047	0,04159	3,78	43,816	0,02282	7,8	2440,6	0,000410
3,19	24,288	0,04117	3,79	44,256	0,02260	7,9	2697,3	0,000371
3,20	24,533	0,04076	3,80	44,701	0,02237	8,0	2981,0	0,000335
3,21	24,779	0,04036	3,81	45,150	0,02215	8,1	3294,5	0,000304
3,22	25,028	0,03996	3,82	45,604	0,02193	8,2	3641,0	0,000275
3,23	25,280	0,03956	3,83	46,063	0,02171	8,3	4023,9	0,000249
3,24	25,534	0,03916	3,84	46,525	0,02149	8,4	4447,1	0,000225

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
8,5	4914,8	0,000203	9,0	8103,1	0,000123	9,5	13360	0,000075
8,6	5431,7	0,000184	9,1	8955,3	0,000112	9,6	14765	0,000068
8,7	6002,9	0,000167	9,2	9897,1	0,000101	9,7	16318	0,000061
8,8	6634,2	0,000151	9,3	10938	0,000091	9,8	18034	0,000055
8,9	7332,6	0,000136	9,4	12088	0,000083	9,9	19930	0,000050
						10,0	22026	0,000045

1.1.1.12. Натуральные логарифмы.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2669	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8785	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2335	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

m	$\ln 10^m$
1	2,3026
2	4,6052
3	6,9078
4	9,2103
5	11,5129

Объяснения к таблице 1.1.1.12 натуральных логарифмов. В отличие от таблиц десятичных логарифмов здесь даны как мантиссы, так и характеристики. Логарифмы чисел, заключенных между 1 и 10, находятся непосредственно в таблице, причем на третий и четвертый десятичные знаки должна быть внесена интерполяционная поправка. Для чисел, бо́льших десяти или меньших единицы, натуральные логарифмы находятся с помощью помещенных в конце таблицы значений логарифмов степеней 10.

1.1.1.13. Длина окружности.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,453	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,918	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99

Продолжение

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,2[illegible]	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,21	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

1.1.1.14. Площадь круга.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1.208	1.227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11.64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54

Продолжение

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,99
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

1.1.1.15. Элементы сегмента круга.

1.1.1.15.1. Длина дуги и площадь сегмента для хорды, равной единице.

Подъем (отношение стрелки к хорде) h/a	Длина дуги l	Площадь сегмента	Подъем (отношение стрелки к хорде) h/a	Длина дуги l	Площадь сегмента
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	0,30	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	0,35	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1,3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	0,40	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	0,45	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	0,50	1,5708	0,3927

1.1.1.15.2. Длина дуги, стрелка, длина хорды и площадь сегмента для радиуса, равного единице.

Центр. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,96	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535

Продолжение

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,6673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,33	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859

Продолжение

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7668	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3.86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455

Продолжение

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

Объяснения к таблицам 1.1.1.13, 1.1.1.14 и 1.1.1.15.

Таблицы 1.1.1.13 и 1.1.1.14 дают значения длины окружности и площади круга диаметра d, лежащего между $d = 1,00$ и $d = 10,0$, с четырьмя значащими цифрами. Если диаметр круга лежит вне этих границ, то площадь или длина окружности определяется для диаметра $10^k d$ или $10^{-k} d$. Найденное число затем умножается в случае длины окружности соответственно на 10^k или 10^{-k}, а в случае площади круга – на 10^{2k} или 10^{-2k}. Если число значащих цифр у d больше трех, необходимо прибегнуть к интерполяции.

Примеры. 1) Для $d = 69,3$ длина окружности равна 217,7, а площадь круга 3772. 2) Для $d = 0,693$ длина окружности равна 2,177, а площадь круга 0,3772.

В таблицах 1.1.1.15 даны элементы сегмента круга (рис. 1.1). Таблица 1.1.1.15.1 относится к сегментам кругов любых радиусов с длиной хорды, равной единице. Если при заданном подъеме (отношении стрелки к хорде) длина хорды равна a, то приведенное в таблице значение длины дуги должно быть умножено на a, а площадь сегмента – на a^2.

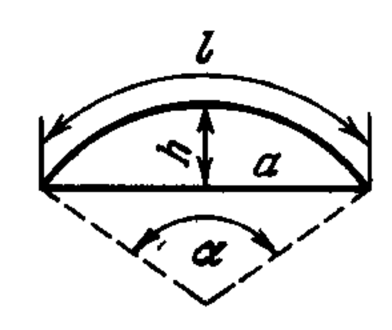


Рис. 1.1

Таблица 1.1.1.15.2 содержит данные, относящиеся к любым сегментам одной и той же окружности радиуса, равного единице. Если длина радиуса равна r, то табличные значения l, h и a

должны быть умножены на r, а площадь сегмента — на r^2. Если задаются длина дуги l (или хорда a) и стрелка h, то радиус сегмента r равен отношению l (или a) к табличному значению длины дуги (или хорды), соответствующему данному значению l/h (или a/h).

Пример. Если длина хорды кругового сегмента $a = 40$ см, а стрелка $h = 6$ см, то для нахождения длины дуги l вычисляем величину $h/a = 0{,}15$ и умножаем соответствующее табличное значение l (таблица 1.1.1.15.1) на 40: $l = 40 \cdot 1{,}0590 = 42{,}36$ см. Радиус сегмента r и центральный угол α определяются с помощью таблицы 1.1.1.15.2. Для $a/h = 6{,}67$ табличное значение для a равно 1,1010 и $\alpha = 66{,}8°$ (линейная интерполяция). Отсюда следует, что $r = 40 : 1{,}1010 = 36{,}33$ см. Теперь можно определить длину дуги l с помощью таблицы 1.1.1.15.2: $l = 36{,}33 \cdot 1{,}1661 = 42{,}36$ см.

Примеры использования таблицы 1.1.1.16.

1) 52° 37′ 23″

50°	= 0,872665
2°	= 0,034907
30′	= 0,008727
7′	= 0,002036
20″	= 0,000097
3″	= 0,000015
	0,918447
52° 37′ 23″	= 0,91845 рад

2) 5,645 рад

5,235988	=	300°
0,409012		
0,401426	=	23°
0,007586		
0,005818	=	20′
0,001768		
0,001745	=	6′
0,000023	=	5″

5,645 рад = 323° 26′ 5″

Радиан — это плоский угол, для которого соответствующая длина дуги равна радиусу (обозначение: рад). Дуга, длина которой равна радиусу, имеет градусную меру 57°17′44,8″.

1.1.1.16. Перевод градусной меры в радианную. (Длина дуги окружности радиуса 1)

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1°	0,017453	21°	0,366519	45°	0,785398	1	0,000291	1″	0,000039
2	0,034907	22	0,383972	50	0,872665	2	0,000582	2	0,000044
3	0,052360	23	0,401426	55	0,959931	3	0,000873	3	0,000048
4	0,069813	24	0,418879	60	1,047198	4	0,001164	4	0,000097
5	0,087266	25	0,436332	65	1,134464	5	0,001454	5	0,000145
6	0,104720	26	0,453786	70	1,221730	6	0,001745	6	0,000194
7	0,122173	27	0,471239	75	1,308997	7	0,002036	7	0,000242
8	0,139626	28	0,488692	80	1,396263	8	0,002327	8	0,000005
9	0,157080	29	0,506145	85	1,483530	9	0,002618	9	0,000010
10	0,174533	30	0,523599	90	1,570796	10	0,002909	10	0,000015
11	0,191986	31	0,541052	100	1,745329	20	0,005818	20	0,000019
12	0,209440	32	0,558505	120	2,094395	30	0,008727	30	0,000024
13	0,226893	33	0,575959	150	2,617994	40	0,011636	40	0,000029
14	0,244346	34	0,593412	180	3,141593	50	0,014544	50	0,000034
15	0,261799	35	0,610865	200	3,490659				
16	0,279253	36	0,628319	250	4,363323				
17	0,296706	37	0,645772	270	4,712389				
18	0,314159	38	0,663225	300	5,235988				
19	0,331613	39	0,680678	360	6,283185				
20	0,349066	40	0,698132	400	6,981317				

1.1.1.17. Пропорциональные части.

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9

Продолжение

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

Продолжение

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	16,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

1.1.1.18. Таблица для квадратичного интерполирования.

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,10			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,225		0,745			

Всем значениям k, заключенным между смежными числами столбца k (как правого, так и левого), соответствует одно и то же значение k_1, помещенное между этими смежными значениями k. «Критическим» (табличным) значениям k соответствует вышележащее k_1.

Примеры. 1) Для $k = 0{,}8$ находим $k_1 = 0{,}040$ (так же как и для всех других k, заключенных между 0,797 и 0,804 или между 0,196 и 0,203).

2) Для $k = 0{,}3$ (или для $k = 0{,}7$) $k_1 = 0{,}052$.

1.1.2. ТАБЛИЦЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.2.1. Гамма-функция.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Значения гамма-функции для $x < 1$ ($x \neq 0, -1, -2, \ldots$) и для $x > 2$ могут быть вычислены при помощи формул

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

Примеры. 1) $\Gamma(0{,}7) = \Gamma(1{,}7)/0{,}7 = 0{,}90864/0{,}7 = 1{,}2981$.

2) $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \cdot \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}88623 = 3{,}32336$.

1.1.2.2. Бесселевы (цилиндрические) функции.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	−∞	−∞	1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	−1,5342	−6,4590	1,003	0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	−0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	−0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	−0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,0041119	0,004521

Продолжение

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
							0,00	0,00
5,0	−0,1776	−0,3276	−0,3085	+0,1479	27,24	24,34	3691	4045
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	3308	3619
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	2966	3239
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	2659	2900
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	2385	2597
5,5	−0,0068	−0,3414	−0,3395	−0,0238	42,69	38,59	2139	2326
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	1918	2083
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	1721	1866
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	1544	1673
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	1386	1499
6,0	+0,1506	−0,2767	−0,2882	−0,1750	67,23	61,34	1244	1344
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	1117	1205
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	1003	1081
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	09001	09691
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	08083	08693
6,5	+0,2601	−0,1538	−0,1732	−0,2741	106,3	97,74	07259	07799
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	06520	06998
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	05857	06280
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	05262	05636
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	04728	05059
7,0	+0,3001	−0,0047	−0,0259	−0,3027	168,6	156,0	04248	04542
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	03817	04078
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	03431	03662
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	03084	03288
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	02772	02953
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	−0,2591	268,2	249,6	02492	02653
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	02240	02383
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	02014	02141
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	01811	01924
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	01629	01729
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	−0,1581	427,6	399,9	01465	01554
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	01317	01396
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	01185	01255
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	01066	01128
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009588	01014
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	−0,0262	683,2	641,6	008626	009120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007761	008200
8,7	−0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006983	007374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006283	006631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005654	005964
9,0	−0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005088	005364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004579	004825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004121	004340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003710	003904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003339	003512
9,5	−0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	003006	003160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002706	002843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002436	002559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	002193	002302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001975	002072
10,0	−0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	001778	001865

1.1.2.3. Полиномы Лежандра (шаровые функции).

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,0	−0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	−0,3125	0,0000
0,05	−0,4962	−0,0747	0,3657	0,0927	−0,2962	−0,1069
0,10	−0,4850	−0,1475	0,3379	0,1788	−0,2488	−0,1995
0,15	−0,4662	−0,2166	0,2928	0,2523	−0,1746	−0,2649
0,20	−0,4400	−0,2800	0,2320	0,3075	−0,0806	−0,2935
0,25	−0,4062	−0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	−0,2799
0,30	−0,3650	−0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	−0,2241
0,35	−0,3162	−0,4178	−0,0187	0,3225	0,2225	−0,1318
0,40	−0,2600	−0,4400	−0,1130	0,2706	0,2926	−0,0146
0,45	−0,1962	−0,4472	−0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	−0,1250	−0,4375	−0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	−0,0462	−0,4091	−0,3590	−0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	−0,3600	−0,4080	−0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	−0,2884	−0,4284	−0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	−0,1925	−0,4121	−0,3652	−0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	−0,0703	−0,3501	−0,4164	−0,2808	−0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	−0,2330	−0,3995	−0,3918	−0,2397
0,85	0,5838	0,2603	−0,0506	−0,2857	−0,4030	−0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	−0,0411	−0,2412	−0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

1.1.2.4. Эллиптические интегралы.

1.1.2.4.1. Эллиптические интегралы 1-го рода: $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$.

φ	α									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

1.1.2.4.2. Эллиптические интегралы 2-го рода: $E(k,\ \varphi)$, $k = \sin\alpha$.

φ	α									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

1.1.2.4.3. Полные эллиптические интегралы: $k = \sin\alpha$.

α°	K	E	α°	K	E	α°	K	E
0	1,5708	1,5708	30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3506	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	∞	1,0000

$$F(k,\ \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},\quad E(k,\ \varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt,$$

$$\mathbf{K} = F\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

$$\mathbf{E} = E\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt.$$

1.1.2.5. Распределение Пуассона.

r	λ							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669
5	–	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227
6	–	–	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164
7	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000008	0,000019
8	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000002

r	λ							
	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,406570	0,367879	0,223130	0,135335	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316
1	0,365913	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263
2	0,164661	0,183940	0,251021	0,270671	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525
3	0,049398	0,061313	0,125510	0,180447	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367
4	0,011115	0,015328	0,047067	0,090224	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367
5	0,002001	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293
6	0,000300	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196
7	0,000039	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540
8	0,000004	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770
9	–	0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231
10	–	–	0,000004	0,000038	0,000216	0,000810	0,002296	0,005292
11	–	–	–	0,000007	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925
12	–	–	–	0,000001	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642
13	–	–	–	–	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197
14	–	–	–	–	–	0,000003	0,000014	0,000056
15	–	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000015
16	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
17	–	–	–	–	–	–	–	0,000001

Продолжение

r	λ						
	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,011109	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,049990	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,112479	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,168718	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007867
4	0,189808	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,170827	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,128120	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,082363	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,046329	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599
9	0,023165	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,010424	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,004264	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736
12	0,001599	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000554	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000178	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000053	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000015	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000004	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000001	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19	–	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	–	–	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	–	–	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	–	–	–	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	–	–	–	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	–	–	–	–	0,000003	0,000016	0,000073
25	–	–	–	–	0,000001	0,000006	0,000029
26	–	–	–	–	–	0,000002	0,000011
27	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
28	–	–	–	–	–	–	0,000001
29	–	–	–	–	–	–	0,000001

1.1.2.6. Нормальное распределение.

1.1.2.6.1. Плотность распределения вероятности $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ нормированного и центрированного нормального распределения.

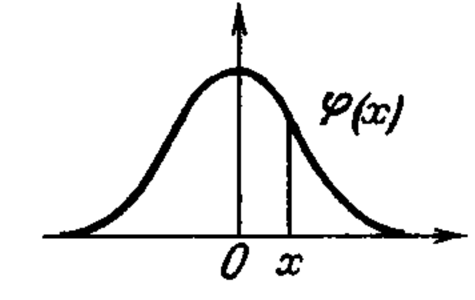


Рис. 1.2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989^{-4}	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970^{-4}	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910^{-4}	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814^{-4}	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683^{-4}	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521^{-4}	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332^{-4}	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3141
0,7	3123^{-4}	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897^{-4}	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661^{-4}	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420^{-4}	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179^{-4}	2155	2131	2107	2083	2059	2035	2012	1989	1965
1,2	1942^{-4}	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714^{-4}	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497^{-4}	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295^{-4}	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109^{-4}	1092	1074	1057	1040	1023	1006	9893^{-5}	9728	9566
1,7	9405^{-5}	9246	9089	8933	8780	8628	8478	8329	8183	8038
1,8	7895^{-5}	7754	7614	7477	7341	7206	7074	6943	6814	6687
1,9	6562^{-5}	6438	6316	6195	6077	5960	5844	5730	5618	5508
2,0	5399^{-5}	5292	5186	5082	4980	4879	4780	4682	4586	4491
2,1	4398^{-5}	4307	4217	4128	4041	3955	3871	3788	3706	3626
2,2	3547^{-5}	3470	3394	3319	3246	3174	3103	3034	2965	2898
2,3	2833^{-5}	2768	2705	2643	2582	2522	2463	2406	2349	2294
2,4	2239^{-5}	2186	2134	2083	2033	1984	1936	1888	1842	1797
2,5	1753^{-5}	1709	1667	1625	1585	1545	1506	1468	1431	1394
2,6	1358^{-5}	1323	1289	1256	1223	1191	1160	1130	1100	1071
2,7	1042^{-5}	1014	9871^{-6}	9606	9347	9094	8846	8605	8370	8140
2,8	7915^{-6}	7697	7483	7274	7071	6873	6679	6491	6307	6127
2,9	5953^{-6}	5782	5616	5454	5296	5143	4993	4847	4705	4567
3,0	4432^{-6}	4301	4173	4049	3928	3810	3695	3584	3475	3370
3,1	3267^{-6}	3167	3070	2975	2884	2794	2707	2623	2541	2461
3,2	2384^{-6}	2309	2236	2165	2096	2029	1961	1901	1840	1780
3,3	1723^{-6}	1667	1612	1560	1508	1459	1411	1364	1319	1275
3,4	1232^{-6}	1191	1151	1112	1075	1038	1003	9689^{-7}	9358	9037
3,5	8727^{-7}	8426	8135	7853	7581	7317	7061	6814	6575	6343
3,6	6119^{-7}	5902	5693	5490	5294	5105	4921	4744	4573	4408
3,7	4248^{-7}	4093	3944	3800	3661	3526	3396	3271	3149	3032
3,8	2919^{-7}	2810	2705	2604	2506	2411	2320	2232	2147	2065
3,9	1987^{-7}	1910	1837	1766	1698	1633	1569	1508	1449	1393
4,0	1338^{-7}	1286	1235	1186	1140	1094	1051	1009	9687^{-8}	9299
4,1	8926^{-8}	8567	8222	7890	7570	7263	6967	6683	6410	6147
4,2	5894^{-8}	5652	5418	5194	4979	4772	4573	4382	4199	4023
4,3	3854^{-8}	3691	3535	3386	3242	3104	2972	2845	2723	2606
4,4	2494^{-8}	2387	2284	2185	2090	1999	1912	1829	1749	1672
4,5	1598^{-8}	1528	1461	1396	1334	1275	1218	1164	1112	1062
4,6	1014^{-8}	9684^{-9}	9248	8830	8430	8047	7681	7331	6996	6676
4,7	6370^{-9}	6077	5797	5530	5274	5030	4796	4573	4360	4156
4,8	3961^{-9}	3775	3598	3428	3267	3112	2965	2824	2690	2561
4,9	2439^{-9}	2322	2211	2105	2003	1907	1814	1727	1643	1563

Замечание. Например, 3989^{-4} означает $3989 \cdot 10^{-4}$.

1.1.2.6.2. Функция распределения $\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ нормированного и центрированного нормального распределения.

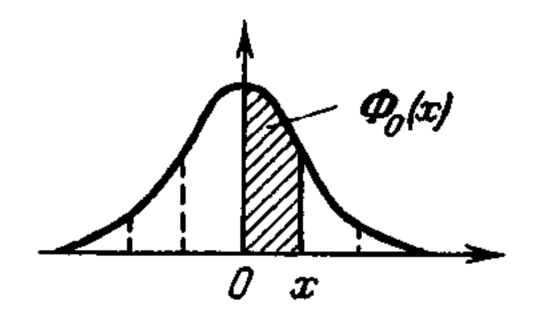


Рис. 1.3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0 000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1 026	064	103	141
0,3	0,1 179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2 019	054	088	123	157	190	224
0,6	0,2 257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	708	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3 023	051	078	106	133
0,9	0,3 159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	655	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4 015
1,3	0,4 032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2*)	860 966	864 474	867 906	871 263	874 545	877 755	880 894	883 962	886 962	889 893
2,3	892 759	895 559	898 296	900 969	903 581	906 133	908 625	911 060	913 437	915 758

*) Начиная с этого места, значение $\Phi_0(x)$ приведено с семью знаками после запятой. Например, запись 2,3 | 892 / 759 означает $\Phi_0(2{,}30) = 0{,}4892759$.

Продолжение

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,4	0,4918 025	920 237	922 397	924 506	926 564	928 572	930 531	932 443	934 309	936 128
2,5	937 903	939 634	941 323	942 969	944 574	946 139	947 664	949 151	950 600	952 012
2,6	953 388	954 729	956 035	957 308	958 547	959 754	960 930	962 074	963 189	964 274
2,7	965 330	966 358	967 359	968 333	969 280	970 202	971 099	971 972	972 821	973 646
2,8	974 449	975 229	975 988	976 726	977 443	978 140	978 818	979 476	980 116	980 738
2,9	981 342	981 929	982 498	983 052	983 589	984 111	984 618	985 110	985 588	986 051
3,0	986 501	986 938	987 361	987 772	988 171	988 558	988 933	989 297	989 650	989 992
3,1	990 324	990 646	990 957	991 260	991 553	991 836	992 112	992 378	992 636	992 886
3,2	993 129	993 363	993 590	993 810	994 024	994 230	994 429	994 523	994 810	994 991
3,3	995 166	995 335	995 499	995 658	995 811	995 959	996 103	996 242	996 376	996 505
3,4	996 631	996 752	996 869	996 982	997 091	997 197	997 299	997 398	997 493	997 585
3,5	997 674	997 759	997 842	997 922	997 999	998 074	998 146	998 215	998 282	998 347
3,6	998 409	998 469	998 527	998 583	998 637	998 689	998 739	998 787	998 834	998 879
3,7	998 922	998 964	999 004	999 043	999 080	999 116	999 150	999 184	999 216	999 247
3,8	999 276	999 305	999 333	999 359	999 385	999 409	999 433	999 456	999 478	999 499
3,9	999 519	999 539	999 557	999 575	999 593	999 609	999 625	999 641	999 655	999 670
4,0	999 683	999 696	999 709	999 721	999 733	999 744	999 755	999 765	999 775	999 784
4,1	999 793	999 802	999 811	999 819	999 826	999 834	999 841	999 848	999 854	999 861
4,2	999 867	999 872	999 878	999 883	999 888	999 893	999 898	999 902	999 907	999 911
4,3	999 915	999 918	999 922	999 925	999 929	999 932	999 935	999 938	999 941	999 943
4,4	999 946	999 948	999 951	999 953	999 955	999 957	999 959	999 961	999 963	999 964
4,5	999 966	999 968	999 969	999 971	999 972	999 973	999 974	999 976	999 977	999 978
5,0	999 997									

1.1.2.7. χ^2-распределение.

В таблице приведены значения (в процентах) квантилей $\chi^2_\alpha(m)$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α.

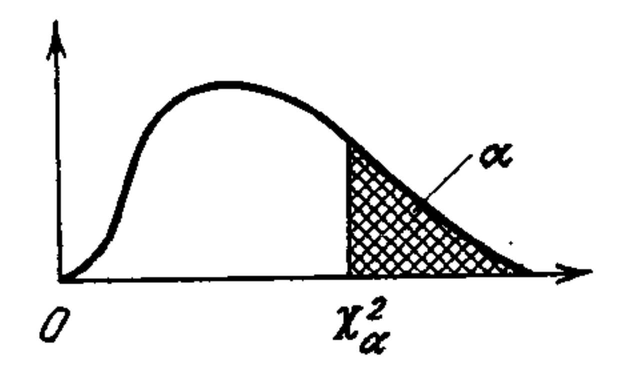


Рис. 1.4

m	α							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,67
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Продолжение

α								m
0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	
1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8	1
3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8	2
4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3	3
6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5	4
7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,8	18,9	20,5	5
8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,5	20,7	22,5	6
9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3	7
11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	22,0	24,3	26,1	8
12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9	9
13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6	10
14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3	11
15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	30,9	32,9	12
17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5	13
18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1	14
19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,6	37,7	15
20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,1	39,3	16
21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,8	17
22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	30,1	42,3	18
23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8	19
25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3	20
26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8	21
27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	45,9	48,3	22
28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,3	49,7	23
29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,7	51,2	24
30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50,1	52,6	25
31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,6	54,1	26
32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	52,9	55,5	27
34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,4	56,9	28
35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	55,7	58,3	29
36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,1	59,7	30

1.1.2.8. t-распределение Стьюдента.

В таблице приведены значения (в процентах) квантилей $t_{\alpha,m}$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α.

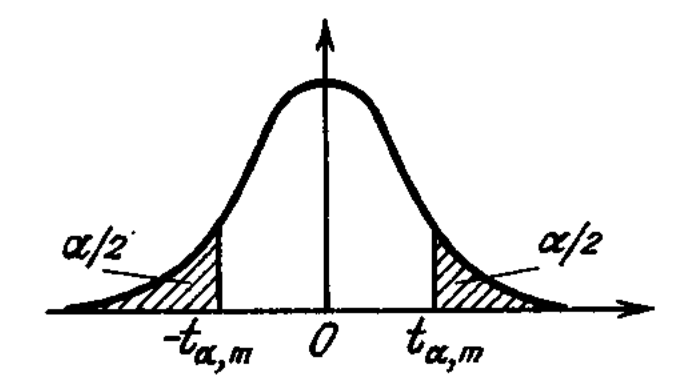


Рис. 1.5

m	α								
	0,10	0,05	0,025	0,020	0,010	0,005	0,003	0,002	0,001
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,598
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,941
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,859
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,707
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

1.1.2.9. z-распределение (см. 5.2.1.3).

r_2	r_1 = 1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4,1535	4,2585	4,2974	4,3175	4,3297	4,3379	4,3482	4,3585	4,3689	4,3794
2	2,2950	2,2976	2,2984	2,2988	2,2991	2,2992	2,2994	2,2997	2,2999	2,3001
3	1,7649	1,7140	1,6915	1,6786	1,6703	1,6645	1,6569	1,6489	1,6404	1,6314
4	1,5270	1,4452	1,4075	1,3856	1,3711	1,3609	1,3473	1,3327	1,3170	1,3000
5	1,3943	1,2929	1,2449	1,2164	1,1974	1,1838	1,1656	1,1457	1,1239	1,0997
6	1,3103	1,1955	1,1401	1,1068	1,0843	1,0680	1,0460	1,0218	0,9948	0,9643
7	1,2526	1,1281	1,0672	1,0300	1,0048	0,9864	0,9614	0,9335	0,9020	0,8658
8	1,2106	1,0787	1,0135	0,9734	0,9459	0,9259	0,8983	0,8673	0,8319	0,7904
9	1,1786	1,0411	0,9724	0,9299	0,9006	0,8791	0,8494	0,8157	0,7769	0,7305
10	1,1535	1,0114	0,9399	0,8954	0,8646	0,8419	0,8104	0,7744	0,7324	0,6816
11	1,1333	0,9874	0,9136	0,8674	0,8354	0,8116	0,7785	0,7405	0,6958	0,6408
12	1,1166	0,9677	0,8919	0,8443	0,8111	0,7864	0,7520	0,7122	0,6649	0,6061
13	1,1027	0,9511	0,8737	0,8248	0,7907	0,7652	0,7295	0,6882	0,6386	0,5761
14	1,0909	0,9370	0,8581	0,8082	0,7732	0,7471	0,7103	0,6675	0,6159	0,5500
15	1,0807	0,9249	0,8448	0,7939	0,7582	0,7314	0,6937	0,6496	0,5961	0,5269
16	1,0719	0,9144	0,8331	0,7814	0,7450	0,7177	0,6791	0,6339	0,5786	0,5064
17	1,0641	0,9051	0,8229	0,7705	0,7335	0,7057	0,6663	0,6199	0,5630	0,4879
18	1,0572	0,8970	0,8138	0,7607	0,7232	0,6950	0,6549	0,6075	0,5491	0,4712
19	1,0511	0,8897	0,8057	0,7521	0,7140	0,6854	0,6447	0,5964	0,5366	0,4560
20	1,0457	0,8831	0,7985	0,7443	0,7058	0,6768	0,6355	0,5864	0,5253	0,4421
21	1,0408	0,8772	0,7920	0,7372	0,6984	0,6690	0,6272	0,5773	0,5150	0,4294
22	1,0363	0,8719	0,7860	0,7309	0,6916	0,6620	0,6196	0,5691	0,5056	0,4176
23	1,0322	0,8670	0,7806	0,7251	0,6855	0,6555	0,6127	0,5615	0,4969	0,4068
24	1,0285	0,8626	0,7757	0,7197	0,6799	0,6496	0,6064	0,5545	0,4890	0,3967
25	1,0251	0,8585	0,7712	0,7148	0,6747	0,6442	0,6006	0,5481	0,4816	0,3872
26	1,0220	0,8548	0,7670	0,7103	0,6699	0,6392	0,5952	0,5422	0,4748	0,3784
27	1,0191	0,8513	0,7631	0,7062	0,6655	0,6346	0,5902	0,5367	0,4685	0,3701
28	1,0164	0,8481	0,7595	0,7023	0,6614	0,6303	0,5856	0,5316	0,4626	0,3624
29	1,0139	0,8451	0,7562	0,6987	0,6576	0,6263	0,5813	0,5269	0,4570	0,3550
30	1,0116	0,8423	0,7531	0,6954	0,6540	0,6226	0,5773	0,5224	0,4519	0,3481
40	0,9949	0,8223	0,7307	0,6712	0,6283	0,5956	0,5481	0,4901	0,4138	0,2952
60	0,9784	0,8025	0,7086	0,6472	0,6028	0,5687	0,5189	0,4574	0,3746	0,2352
120	0,9622	0,7829	0,6867	0,6234	0,5774	0,5419	0,4897	0,4243	0,3339	0,1612
∞	0,9462	0,7636	0,6651	0,5999	0,5522	0,5152	0,4604	0,3908	0,2913	0,0000

1.1.2.10. F-распределение (распределение v^2)*).

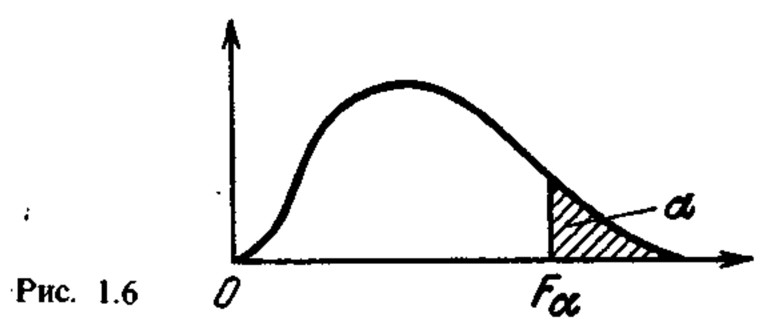


Рис. 1.6

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 **4052**	200 **4999**	216 **5403**	225 **5625**	230 **5764**	234 **5859**	237 **5928**	239 **5981**	241 **6022**	242 **6056**	243 **6082**	244 **6106**
2	18,51 **98,50**	19,00 **99,00**	19,16 **99,17**	19,25 **99,25**	19,30 **99,30**	19,33 **99,33**	19,35 **99,36**	19,37 **99,37**	19,38 **99,39**	19,39 **99,40**	19,40 **99,41**	19,41 **99,42**
3	10,13 **34,12**	9,55 **30,82**	9,28 **29,46**	9,12 **28,71**	9,01 **28,24**	8,94 **27,91**	8,89 **27,67**	8,85 **27,49**	8,81 **27,34**	8,79 **27,23**	8,76 **27,13**	8,74 **27,05**
4	7,71 **21,20**	6,94 **18,00**	6,59 **16,69**	6,39 **15,98**	6,26 **15,52**	6,16 **15,21**	6,09 **14,98**	6,04 **14,80**	6,00 **14,66**	5,96 **14,55**	5,94 **14,45**	5,91 **14,37**
5	6,61 **16,26**	5,79 **13,27**	5,41 **12,06**	5,19 **11,39**	5,05 **10,97**	4,95 **10,67**	4,88 **10,46**	4,82 **10,29**	4,77 **10,16**	4,74 **10,05**	4,70 **9,96**	4,68 **9,89**
6	5,99 **13,74**	5,14 **10,92**	4,76 **9,78**	4,53 **9,15**	4,39 **8,75**	4,28 **8,47**	4,21 **8,26**	4,15 **8,10**	4,10 **7,98**	4,06 **7,87**	4,03 **7,79**	4,00 **7,72**
7	5,59 **12,25**	4,74 **9,55**	4,35 **8,45**	4,12 **7,85**	3,97 **7,46**	3,87 **7,19**	3,79 **7,00**	3,73 **6,84**	3,68 **6,72**	3,64 **6,62**	3,60 **6,54**	3,57 **6,47**
8	5,32 **11,26**	4,46 **8,65**	4,07 **7,59**	3,84 **7,01**	3,69 **6,63**	3,58 **6,37**	3,50 **6,18**	3,44 **6,03**	3,39 **5,91**	3,35 **5,81**	3,31 **5,73**	3,28 **5,67**
9	5,12 **10,56**	4,26 **8,02**	3,86 **6,99**	3,63 **6,42**	3,48 **6,06**	3,37 **5,80**	3,29 **5,61**	3,23 **5,47**	3,18 **5,35**	3,14 **5,26**	3,10 **5,18**	3,07 **5,11**
10	4,96 **10,04**	4,10 **7,56**	3,71 **6,55**	3,48 **5,99**	3,33 **5,64**	3,22 **5,39**	3,14 **5,20**	3,07 **5,06**	3,02 **4,94**	2,98 **4,85**	2,94 **4,77**	2,91 **4,71**
11	4,84 **9,65**	3,98 **7,21**	3,59 **6,22**	3,36 **5,67**	3,20 **5,32**	3,09 **5,07**	3,01 **4,89**	2,95 **4,74**	2,90 **4,68**	2,85 **4,54**	2,82 **4,46**	2,79 **4,40**
12	4,75 **9,33**	3,89 **6,93**	3,49 **5,95**	3,26 **5,41**	3,11 **5,06**	3,00 **4,82**	2,91 **4,64**	2,85 **4,50**	2,80 **4,39**	2,75 **4,30**	2,72 **4,22**	2,69 **4,16**
13	4,67 **9,07**	3,81 **6,70**	3,41 **5,74**	3,18 **5,21**	3,03 **4,86**	2,92 **4,62**	2,83 **4,44**	2,77 **4,30**	2,71 **4,19**	2,67 **4,10**	2,63 **4,02**	2,60 **3,96**
14	4,60 **8,86**	3,74 **6,51**	3,34 **5,56**	3,11 **5,04**	2,96 **4,70**	2,85 **4,46**	2,76 **4,28**	2,70 **4,14**	2,65 **4,03**	2,60 **3,94**	2,57 **3,86**	2,53 **3,80**
15	4,54 **8,68**	3,68 **6,36**	3,29 **5,42**	3,06 **4,89**	2,90 **4,56**	2,79 **4,32**	2,71 **4,14**	2,64 **4,00**	2,59 **3,89**	2,54 **3,80**	2,51 **3,78**	2,48 **3,67**
16	4,49 **8,53**	3,63 **6,23**	3,24 **5,29**	3,01 **4,77**	2,85 **4,44**	2,74 **4,20**	2,66 **4,03**	2,59 **3,89**	2,54 **3,78**	2,49 **3,69**	2,46 **3,62**	2,42 **3,55**
17	4,45 **8,40**	3,59 **6,11**	3,20 **5,18**	2,96 **4,67**	2,81 **4,34**	2,70 **4,10**	2,61 **3,93**	2,55 **3,79**	2,49 **3,68**	2,45 **3,59**	2,41 **3,52**	2,38 **3,46**

*) В таблице даны значения квантилей $v^2_{1-\alpha}$ (m_1, m_2) для $\alpha = 0,05$ (светлый шрифт) и для $\alpha = 0,01$ (полужирный шрифт) в зависимости от числа степеней свободы m_1 и m_2 (m^1 – число степеней свободы для большей дисперсии, m_2 – число степеней свободы для меньшей дисперсии).

Продолжение

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
245 **6143**	246 **6169**	248 **6209**	249 **6235**	250 **6261**	251 **6287**	252 **6302**	253 **6323**	253 **6334**	254 **6352**	254 **6361**	254 **6366**	1
19,42 **99,43**	19,43 **99,44**	19,44 **99,45**	19,45 **99,46**	19,46 **99,47**	19,47 **99,47**	19,48 **99,48**	19,48 **99,48**	19,49 **99,49**	19,49 **99,49**	19,50 **99,50**	19,50 **99,50**	2
8,71 **26,92**	8,69 **26,83**	8,66 **26,69**	8,64 **26,60**	8,62 **26,50**	8,59 **26,41**	8,58 **26,35**	8,57 **26,27**	8,55 **26,23**	8,54 **26,18**	8,53 **26,14**	8,53 **26,12**	3
5,87 **14,25**	5,84 **14,15**	5,80 **14,02**	5,77 **13,93**	5,75 **13,84**	5,72 **13,74**	5,70 **13,69**	5,68 **13,61**	5,66 **13,57**	5,65 **13,52**	5,64 **13,48**	5,63 **13,46**	4
4,64 **9,77**	4,60 **9,68**	4,56 **9,55**	4,53 **9,47**	4,50 **9,38**	4,46 **9,29**	4,44 **9,24**	4,42 **9,17**	4,41 **9,13**	4,39 **9,08**	4,37 **9,04**	4,36 **9,02**	5
3,96 **7,60**	3,92 **7,52**	3,87 **7,39**	3,84 **7,31**	3,81 **7,23**	3,77 **7,14**	3,75 **7,09**	3,72 **7,02**	3,71 **6,99**	3,69 **6,93**	3,68 **6,90**	3,67 **6,88**	6
3,53 **6,36**	3,49 **6,27**	3,44 **6,16**	3,41 **6,07**	3,38 **5,99**	3,34 **5,91**	3,32 **5,86**	3,29 **5,78**	3,27 **5,75**	3,25 **5,70**	3,24 **5,67**	3,23 **5,65**	7
3,24 **5,56**	3,20 **5,48**	3,15 **5,36**	3,12 **5,28**	3,08 **5,20**	3,05 **5,12**	3,02 **5,07**	3,00 **5,00**	2,97 **4,96**	2,95 **4,91**	2,94 **4,88**	2,93 **4,86**	8
3,03 **5,00**	2,99 **4,92**	2,93 **4,81**	2,90 **4,73**	2,86 **4,65**	2,83 **4,57**	2,80 **4,52**	2,77 **4,45**	2,76 **4,42**	2,73 **4,36**	2,72 **4,33**	2,71 **4,31**	9
2,86 **4,60**	2,83 **4,52**	2,77 **4,41**	2,74 **4,33**	2,70 **4,25**	2,66 **4,17**	2,64 **4,12**	2,61 **4,05**	2,59 **4,01**	2,56 **3,96**	2,55 **3,93**	2,54 **3,91**	10
2,74 **4,29**	2,70 **4,21**	2,65 **4,10**	2,61 **4,02**	2,57 **3,94**	2,53 **3,86**	2,51 **3,81**	2,47 **3,74**	2,46 **3,71**	2,43 **3,66**	2,42 **3,62**	2,40 **3,60**	11
2,64 **4,05**	2,60 **3,97**	2,54 **3,86**	2,51 **3,78**	2,47 **3,70**	2,43 **3,62**	2,40 **3,57**	2,36 **3,49**	2,35 **3,47**	2,32 **3,41**	2,31 **3,38**	2,30 **3,36**	12
2,55 **3,86**	2,51 **3,78**	2,46 **3,66**	2,42 **3,59**	2,38 **3,51**	2,34 **3,43**	2,31 **3,38**	2,28 **3,30**	2,26 **3,27**	2,23 **3,22**	2,22 **3,19**	2,21 **3,17**	13
2,48 **3,70**	2,44 **3,62**	2,39 **3,51**	2,35 **3,43**	2,31 **3,35**	2,27 **3,27**	2,24 **3,22**	2,21 **3,14**	2,19 **3,11**	2,16 **3,06**	2,14 **3,03**	2,13 **3,00**	14
2,42 **3,56**	2,38 **3,49**	2,33 **3,37**	2,29 **3,29**	2,25 **3,21**	2,20 **3,13**	2,18 **3,08**	2,15 **3,00**	2,12 **2,98**	2,10 **2,92**	2,08 **2,89**	2,07 **2,87**	15
2,37 **3,45**	2,33 **3,37**	2,28 **3,26**	2,24 **3,18**	2,19 **3,10**	2,15 **3,02**	2,12 **2,97**	2,09 **2,86**	2,07 **2,86**	2,04 **2,81**	2,02 **2,78**	2,01 **2,75**	16
2,33 **3,35**	2,29 **3,27**	2,23 **3,16**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,10 **2,92**	2,08 **2,87**	2,04 **2,79**	2,02 **2,76**	1,99 **2,71**	1,97 **2,68**	1,96 **2,65**	17

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	4,41 **8,29**	3,55 **6,01**	3,16 **5,09**	2,93 **4,58**	2,77 **4,05**	2,66 **4,01**	2,58 **3,84**	2,51 **3,71**	2,46 **3,60**	2,41 **3,51**	2,37 **3,43**	2,34 **3,37**
19	4,38 **8,18**	3,52 **5,93**	3,13 **5,01**	2,90 **4,50**	2,74 **4,17**	2,63 **3,94**	2,54 **3,77**	2,48 **3,63**	2,42 **3,52**	2,38 **3,43**	2,34 **3,36**	2,31 **3,30**
20	4,35 **8,10**	3,49 **5,85**	3,10 **4,94**	2,87 **4,43**	2,71 **4,10**	2,60 **3,87**	2,51 **3,70**	2,45 **3,56**	2,39 **3,46**	2,35 **3,37**	2,31 **3,29**	2,28 **3,23**
21	4,32 **8,02**	3,47 **5,78**	3,07 **4,87**	2,84 **4,37**	2,68 **4,04**	2,57 **3,81**	2,49 **3,64**	2,42 **3,51**	2,37 **3,40**	2,32 **3,31**	2,28 **3,24**	2,25 **3,17**
22	4,30 **7,95**	3,44 **5,72**	3,05 **4,82**	2,82 **4,81**	2,66 **3,99**	2,55 **3,76**	2,46 **3,59**	2,40 **3,45**	2,34 **3,35**	2,30 **3,26**	2,26 **3,18**	2,23 **3,12**
23	4,28 **7,88**	3,42 **5,66**	3,03 **4,76**	2,80 **4,26**	2,64 **3,94**	2,53 **3,71**	2,44 **3,54**	2,37 **3,41**	2,32 **3,30**	2,27 **3,21**	2,24 **3,14**	2,20 **3,07**
24	4,26 **7,82**	3,40 **5,61**	3,01 **4,72**	2,78 **4,22**	2,62 **3,90**	2,51 **3,67**	2,42 **3,50**	2,36 **3,36**	2,30 **3,26**	2,25 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,03**
25	4,24 **7,77**	3,39 **5,57**	2,99 **4,68**	2,76 **4,18**	2,60 **3,86**	2,49 **3,63**	2,40 **3,46**	2,34 **3,32**	2,28 **3,22**	2,24 **3,13**	2,20 **3,06**	2,16 **2,99**
26	4,23 **7,72**	4,37 **5,53**	2,98 **4,64**	2,74 **4,14**	2,59 **3,82**	2,47 **3,59**	2,39 **3,42**	2,32 **3,29**	2,27 **3,18**	2,22 **3,09**	2,18 **3,02**	2,15 **2,96**
27	4,21 **7,68**	3,35 **5,49**	2,96 **4,60**	2,73 **4,11**	2,57 **3,78**	2,46 **3,56**	2,37 **3,39**	2,31 **3,26**	2,25 **3,15**	2,20 **3,06**	2,16 **2,99**	2,13 **2,83**
28	4,20 **7,64**	3,34 **5,45**	2,95 **4,57**	2,71 **4,07**	2,56 **3,76**	2,45 **3,53**	2,36 **3,36**	2,29 **3,23**	2,24 **3,12**	2,19 **3,03**	2,15 **2,96**	2,12 **2,90**
29	4,18 **7,60**	3,33 **5,42**	2,93 **4,54**	2,70 **4,04**	2,55 **3,73**	2,43 **3,50**	2,35 **3,33**	2,28 **3,20**	2,22 **3,09**	2,18 **3,00**	2,14 **2,93**	2,10 **2,87**
30	4,17 **7,56**	3,32 **5,39**	2,92 **4,51**	2,69 **4,02**	2,53 **3,70**	2,42 **3,47**	2,33 **3,30**	2,27 **3,17**	2,21 **3,07**	2,16 **2,98**	2,13 **2,90**	2,09 **2,84**
32	4,15 **7,50**	3,29 **5,34**	2,90 **4,46**	2,67 **3,97**	2,51 **3,65**	2,40 **3,43**	2,31 **3,25**	2,24 **3,13**	2,19 **3,02**	2,14 **2,93**	2,10 **2,86**	2,07 **2,80**
34	4,13 **7,44**	3,28 **5,29**	2,88 **4,42**	2,65 **3,93**	2,49 **3,61**	2,38 **3,39**	2,29 **3,22**	2,23 **3,09**	2,17 **2,98**	2,12 **2,89**	2,08 **2,82**	2,05 **2,76**
36	4,11 **7,40**	3,26 **5,25**	2,87 **4,38**	2,63 **3,89**	2,48 **3,57**	2,36 **3,35**	2,28 **3,18**	2,21 **3,05**	2,15 **2,95**	2,11 **2,86**	2,07 **2,79**	2,03 **2,72**
38	4,10 **7,35**	3,24 **5,21**	2,85 **4,34**	2,62 **3,86**	2,46 **3,54**	2,35 **3,32**	2,26 **3,15**	2,19 **3,02**	2,14 **2,91**	2,09 **2,82**	2,05 **2,75**	2,02 **2,69**
40	4,08 **7,31**	3,23 **5,18**	2,84 **4,31**	2,61 **3,83**	2,45 **3,51**	2,34 **3,29**	2,25 **3,12**	2,18 **2,99**	2,12 **2,89**	2,08 **2,80**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**
42	4,07 **7,28**	3,22 **5,15**	2,83 **4,29**	2,59 **3,80**	2,44 **3,49**	2,32 **3,27**	2,24 **3,10**	2,17 **2,97**	2,11 **2,86**	2,06 **2,78**	2,03 **2,70**	1,99 **2,64**
44	4,06 **7,25**	3,21 **5,12**	2,82 **4,26**	2,58 **3,78**	2,43 **3,47**	2,31 **3,24**	2,23 **3,08**	2,16 **2,95**	2,10 **2,84**	2,05 **2,75**	2,01 **2,68**	1,98 **2,62**
46	4,05 **7,22**	3,20 **5,10**	2,81 **4,24**	2,57 **3,76**	2,42 **3,44**	2,30 **3,22**	2,22 **3,06**	2,15 **2,93**	2,09 **2,82**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,97 **2,60**

Продолжение

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
2,29 **3,27**	2,25 **3,19**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,06 **2,84**	2,04 **2,78**	2,00 **2,71**	1,98 **2,68**	1,95 **2,62**	1,93 **2,59**	1,92 **2,57**	18
2,26 **3,19**	2,21 **3,12**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,07 **2,84**	2,03 **2,76**	2,00 **2,71**	1,96 **2,63**	1,94 **2,60**	1,91 **2,55**	1,90 **2,51**	1,88 **2,49**	19
2,22 **3,13**	2,18 **3,05**	2,12 **2,94**	2,08 **2,86**	2,04 **2,78**	1,99 **2,69**	1,97 **2,64**	1,92 **2,56**	1,91 **2,54**	1,88 **2,48**	1,86 **2,44**	1,84 **2,42**	20
2,20 **3,07**	2,16 **2,99**	2,10 **2,88**	2,05 **2,80**	2,01 **2,72**	1,96 **2,64**	1,94 **2,58**	1,89 **2,51**	1,88 **2,48**	1,84 **2,42**	1,82 **2,38**	1,81 **2,36**	21
2,17 **3,02**	2,13 **2,94**	2,07 **2,83**	2,03 **2,75**	1,98 **2,67**	1,94 **2,58**	1,91 **2,53**	1,87 **2,46**	1,85 **2,42**	1,81 **2,36**	1,80 **2,33**	1,78 **2,31**	22
2,15 **2,97**	2,11 **2,89**	2,05 **2,78**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,91 **2,54**	1,88 **2,48**	1,84 **2,41**	1,82 **2,37**	1,79 **2,32**	1,77 **2,28**	1,76 **2,26**	23
2,13 **2,93**	2,09 **2,85**	2,03 **2,74**	1,98 **2,66**	1,94 **2,58**	1,89 **2,49**	1,86 **2,44**	1,82 **2,36**	1,80 **2,33**	1,77 **2,27**	1,75 **2,24**	1,73 **2,21**	24
2,11 **2,89**	2,07 **2,81**	2,01 **2,70**	1,96 **2,62**	1,92 **2,54**	1,87 **2,45**	1,84 **2,40**	1,80 **2,32**	1,78 **2,29**	1,75 **2,23**	1,73 **2,19**	1,71 **2,17**	25
2,10 **2,86**	2,05 **2,78**	1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,90 **2,50**	1,85 **2,42**	1,82 **2,36**	1,78 **2,28**	1,76 **2,25**	1,73 **2,19**	1,70 **2,16**	1,69 **2,13**	26
2,08 **2,82**	2,04 **2,75**	1,97 **2,63**	1,93 **2,55**	1,88 **2,47**	1,84 **2,38**	1,81 **2,33**	1,76 **2,25**	1,74 **2,22**	1,71 **2,16**	1,68 **2,12**	1,67 **2,10**	27
2,06 **2,80**	2,02 **2,71**	1,96 **2,60**	1,91 **2,52**	1,87 **2,44**	1,82 **2,35**	1,79 **2,30**	1,75 **2,22**	1,73 **2,19**	1,69 **2,13**	1,67 **2,09**	1,65 **2,06**	28
2,05 **2,77**	2,01 **2,69**	1,94 **2,57**	1,90 **2,49**	1,85 **2,41**	1,80 **2,33**	1,77 **2,27**	1,73 **2,19**	1,71 **2,16**	1,67 **2,10**	1,65 **2,06**	1,64 **2,03**	29
2,04 **2,74**	1,99 **2,66**	1,93 **2,55**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,79 **2,30**	1,76 **2,25**	1,72 **2,16**	1,70 **2,13**	1,66 **2,07**	1,64 **2,03**	1,62 **2,01**	30
2,01 **2,70**	1,97 **2,62**	1,91 **2,50**	1,86 **2,42**	1,82 **2,34**	1,77 **2,25**	1,74 **2,20**	1,69 **2,12**	1,67 **2,08**	1,63 **2,02**	1,61 **1,98**	1,59 **1,96**	32
1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,89 **2,46**	1,84 **2,38**	1,80 **2,30**	1,75 **2,21**	1,71 **2,16**	1,67 **2,08**	1,65 **2,04**	1,61 **1,98**	1,59 **1,94**	1,57 **1,91**	34
1,98 **2,62**	1,93 **2,54**	1,87 **2,43**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,73 **2,17**	1,69 **2,12**	1,65 **2,04**	1,62 **2,00**	1,59 **1,94**	1,56 **1,90**	1,55 **1,87**	36
1,96 **2,59**	1,92 **2,51**	1,85 **2,40**	1,81 **2,32**	1,76 **2,23**	1,71 **2,14**	1,68 **2,09**	1,63 **2,00**	1,61 **1,97**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,53 **1,84**	38
1,95 **2,56**	1,90 **2,48**	1,84 **2,37**	1,79 **2,29**	1,74 **2,20**	1,69 **2,11**	1,66 **2,06**	1,61 **1,97**	1,59 **1,94**	1,55 **1,87**	1,53 **1,83**	1,51 **1,80**	40
1,93 **2,54**	1,89 **2,46**	1,83 **2,34**	1,78 **2,26**	1,73 **2,18**	1,68 **2,09**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,57 **1,91**	1,53 **1,85**	1,51 **1,80**	1,49 **1,78**	42
1,92 **2,52**	1,88 **2,44**	1,81 **2,32**	1,77 **2,24**	1,72 **2,15**	1,67 **2,06**	1,63 **2,01**	1,58 **1,92**	1,56 **1,89**	1,52 **1,82**	1,49 **1,78**	1,48 **1,75**	44
1,91 **2,50**	1,87 **2,42**	1,80 **2,30**	1,76 **2,22**	1,71 **2,13**	1,65 **2,04**	1,62 **1,99**	1,57 **1,90**	1,55 **1,86**	1,51 **1,80**	1,48 **1,75**	1,46 **1,73**	46

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
	7,20	**5,08**	**4,22**	**3,74**	**3,43**	**3,20**	**3,04**	**2,91**	**2,80**	**2,72**	**2,64**	**2,58**
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
	7,17	**5,06**	**4,20**	**3,72**	**3,41**	**3,19**	**3,02**	**2,89**	**2,79**	**2,70**	**2,63**	**2,56**
55	4,02	3,16	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93
	7,12	**5,01**	**4,16**	**3,68**	**3,37**	**3,15**	**2,98**	**2,85**	**2,75**	**2,66**	**2,59**	**2,53**
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
	7,08	**4,98**	**4,13**	**3,65**	**3,34**	**3,12**	**2,95**	**2,82**	**2,72**	**2,63**	**2,56**	**2,50**
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90
	7,04	**4,95**	**4,10**	**3,62**	**3,31**	**3,09**	**2,93**	**2,80**	**2,69**	**2,61**	**2,53**	**2,47**
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89
	7,01	**4,92**	**4,08**	**3,60**	**3,29**	**3,07**	**2,91**	**2,78**	**2,67**	**2,59**	**2,51**	**2,45**
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88
	6,96	**4,88**	**4,04**	**3,56**	**3,26**	**3,04**	**2,87**	**2,74**	**2,64**	**2,55**	**2,48**	**2,42**
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85
	6,90	**4,82**	**3,98**	**3,51**	**3,21**	**2,99**	**2,82**	**2,69**	**2,59**	**2,50**	**2,43**	**2,37**
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83
	6,84	**4,78**	**3,94**	**3,47**	**3,17**	**2,95**	**2,79**	**2,66**	**2,55**	**2,47**	**2,40**	**2,33**
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
	6,81	**4,75**	**3,92**	**3,45**	**3,14**	**2,92**	**2,76**	**2,63**	**2,53**	**2,44**	**2,37**	**2,31**
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
	6,76	**4,71**	**3,88**	**3,41**	**3,11**	**2,89**	**2,73**	**2,60**	**2,50**	**2,41**	**2,34**	**2,27**
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
	6,70	**4,66**	**3,83**	**3,36**	**3,06**	**2,85**	**2,69**	**2,55**	**2,46**	**2,37**	**2,29**	**2,23**
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
	6,66	**4,63**	**3,80**	**3,34**	**3,04**	**2,82**	**2,66**	**2,53**	**2,43**	**2,34**	**2,27**	**2,20**
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	6,63	**4,61**	**3,78**	**3,32**	**3,02**	**2,80**	**2,64**	**2,51**	**2,41**	**2,32**	**2,25**	**2,18**

Продолжение

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45	48
2,48	**2,40**	**2,28**	**2,20**	**2,12**	**2,08**	**1,97**	**1,88**	**1,84**	**1,78**	**1,73**	**1,70**	
1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44	50
2,46	**2,38**	**2,26**	**2,18**	**2,10**	**2,00**	**1,95**	**1,86**	**1,82**	**1,76**	**1,71**	**1,68**	
1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41	55
2,43	**2,34**	**2,23**	**2,15**	**2,06**	**1,96**	**1,91**	**1,82**	**1,78**	**1,71**	**1,67**	**1,64**	
1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,58	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39	60
2,39	**2,31**	**2,20**	**2,12**	**2,03**	**1,94**	**1,88**	**1,79**	**1,75**	**1,68**	**1,63**	**1,60**	
1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37	65
2,37	**2,29**	**2,18**	**2,09**	**2,00**	**1,90**	**1,85**	**1,76**	**1,72**	**1,65**	**1,60**	**1,56**	
1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35	70
2,35	**2,27**	**2,15**	**2,07**	**1,98**	**1,88**	**1,83**	**1,74**	**1,70**	**1,62**	**1,57**	**1,53**	
1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32	80
2,31	**2,23**	**2,12**	**2,03**	**1,94**	**1,85**	**1,79**	**1,70**	**1,66**	**1,58**	**1,53**	**1,49**	
1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	1,28	100
2,26	**2,19**	**2,06**	**1,98**	**1,89**	**1,79**	**1,73**	**1,64**	**1,60**	**1,52**	**1,47**	**1,43**	
1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25	125
2,23	**2,15**	**2,03**	**1,94**	**1,85**	**1,75**	**1,69**	**1,59**	**1,55**	**1,47**	**1,41**	**1,37**	
1,76	1,71	1,64	1,59	1,53	1,48	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22	150
2,20	**2,12**	**2,00**	**1,91**	**1,83**	**1,72**	**1,66**	**1,56**	**1,52**	**1,43**	**1,38**	**1,33**	
1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19	200
2,17	**2,09**	**1,97**	**1,88**	**1,79**	**1,69**	**1,63**	**1,53**	**1,48**	**1,39**	**1,33**	**1,28**	
1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13	400
2,12	**2,04**	**1,92**	**1,84**	**1,74**	**1,64**	**1,57**	**1,47**	**1,42**	**1,32**	**1,24**	**1,19**	
1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08	1000
2,09	**2,02**	**1,89**	**1,81**	**1,71**	**1,61**	**1,54**	**1,44**	**1,38**	**1,28**	**1,19**	**1,11**	
1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00	∞
2,08	**2,00**	**1,88**	**1,79**	**1,70**	**1,59**	**1,52**	**1,41**	**1,36**	**1,25**	**1,15**	**1,00**	

1.1.2.11. Критические числа для испытания Уилкоксона (см. 5.2.3.5).

$\alpha = 0{,}05$

	n_2											n_1
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	–	–	–	–	8,0	9,0	10,0	10,0	11,0	12,0	13,0	2
	–	7,5	8,0	9,5	10,0	11,5	12,0	13,5	14,0	15,5	16,0	3
	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	4
	9,0	10,5	12,0	12,5	14,0	15,5	17,0	18,5	19,0	20,5	22,0	5
			13,0	15,0	16,0	17,0	19,0	20,0	22,0	23,0	25,0	6
15	47,5			16,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5	27,0	7
14	46,0	48,0			19,0	21,0	23,0	25,0	26,0	28,0	29,0	8
13	43,5	45,0	47,5			22,5	25,0	26,5	28,0	30,5	32,0	9
12	41,0	43,0	45,0	47,0			27,0	29,0	30,0	32,0	34,0	10
11	38,5	40,0	42,5	44,0	46,5			30,5	33,0	34,5	37,0	11
10	36,0	38,0	40,0	42,0	43,0	45,0			35,0	37,0	39,0	12
9	33,5	35,0	37,5	39,0	40,5	42,0	44,5			38,5	41,0	13
8	31,0	33,0	34,0	36,0	38,0	39,0	41,0	42,0			43,0	14
7	28,5	30,0	31,5	33,0	34,5	36,0	37,5	39,0	40,5			
6	26,0	27,0	29,0	30,0	32,0	33,0	34,0	36,0	37,0	38,0	39,0	
5	23,5	24,0	25,5	27,0	28,5	30,0	30,5	32,0	33,5	35,0	35,5	
4	20,0	21,0	23,0	24,0	25,0	26,0	27,0	28,0	29,0	30,0	32,0	
3	17,5	18,0	19,5	20,0	21,5	22,0	23,5	24,0	25,5	26,0	27,5	
2	14,0	15,0	15,0	16,0	17,0	18,0	18,0	19,0	20,0	21,0	22,0	
n_1	n_2											
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

$\alpha = 0{,}01$

	n_2											n_1
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	–	–	–	–	–	13,5	15,0	16,5	17,0	18,5	20,0	3
	–	–	12,0	14,0	15,0	17,0	18,0	20,0	21,0	22,0	24,0	4
	–	12,5	14,0	15,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5	28,0	5
			16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	27,0	29,0	31,0	6
15	61,5			20,5	22,0	24,5	26,0	28,5	30,0	32,5	34,0	7
14	59,0	62,0			25,0	27,0	29,0	31,0	33,0	35,0	38,0	8
13	55,5	58,0	61,5			29,5	32,0	33,5	36,0	38,5	41,0	9
12	53,0	55,0	58,0	61,0			34,0	36,0	39,0	41,0	44,0	10
11	49,5	52,0	54,5	57,0	59,5			39,5	42,0	44,5	47,0	11
10	46,0	49,0	51,0	53,0	56,0	58,0			44,0	47,0	50,0	12
9	42,5	45,0	47,5	50,0	52,5	54,0	56,5			50,5	53,0	13
8	40,0	42,0	44,0	46,0	48,0	50,0	52,0	54,0			56,0	14
7	36,5	38,0	40,5	42,0	44,5	46,0	48,5	50,0	51,5			
6	33,0	35,0	36,0	38,0	40,0	42,0	44,0	45,0	47,0	49,0	51,0	
5	29,5	31,0	32,5	34,0	35,5	37,0	38,5	41,0	42,5	44,0	45,5	
4	25,0	27,0	28,0	30,0	31,0	32,0	34,0	35,0	37,0	38,0	40,0	
3	20,5	22,0	23,5	25,0	25,5	27,0	28,5	29,0	30,5	32,0	32,5	
2	–	–	–	–	19,0	20,0	21,0	22,0	23,0	24,0	25,0	
n_1	n_2											
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

1.1.2.12. λ-распределение Колмогорова — Смирнова (см. 5.2.3.8).

λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$
0,32	0,0000	0,66	0,2236	1,00	0,7300	1,34	0,9449	1,68	0,9929	2,00	0,9993
0,33	0,0001	0,67	0,2396	1,01	0,7406	1,35	0,9478	1,69	0,9934	2,01	0,9994
0,34	0,0002	0,68	0,2558	1,02	0,7508	1,36	0,9505	1,70	0,9938	2,02	0,9994
0,35	0,0003	0,69	0,2722	1,03	0,7608	1,37	0,9531	1,71	0,9942	2,03	0,9995
0,36	0,0005	0,70	0,2888	1,04	0,7704	1,38	0,9556	1,72	0,9946	2,04	0,9995
0,37	0,0008	0,71	0,3055	1,05	0,7798	1,39	0,9580	1,73	0,9950	2,05	0,9996
0,38	0,0013	0,72	0,3223	1,06	0,7889	1,40	0,9603	1,74	0,9953	2,06	0,9996
0,39	0,0019	0,73	0,3391	1,07	0,7976	1,41	0,9625	1,75	0,9956	2,07	0,9996
0,40	0,0028	0,74	0,3560	1,08	0,8061	1,42	0,9646	1,76	0,9959	2,08	0,9996
0,41	0,0040	0,75	0,3728	1,09	0,8143	1,43	0,9665	1,77	0,9962	2,09	0,9997
0,42	0,0055	0,76	0,3896	1,10	0,8223	1,44	0,9684	1,78	0,9965	2,10	0,9997
0,43	0,0074	0,77	0,4064	1,11	0,8299	1,45	0,9702	1,79	0,9967	2,11	0,9997
0,44	0,0097	0,78	0,4230	1,12	0,8374	1,46	0,9718	1,80	0,9969	2,12	0,9997
0,45	0,0126	0,79	0,4395	1,13	0,8445	1,47	0,9734	1,81	0,9971	2,13	0,9998
0,46	0,0160	0,80	0,4559	1,14	0,8514	1,48	0,9750	1,82	0,9973	2,14	0,9998
0,47	0,0200	0,81	0,4720	1,15	0,8580	1,49	0,9764	1,83	0,9975	2,15	0,9998
0,48	0,0247	0,82	0,4880	1,16	0,8644	1,50	0,9778	1,84	0,9977	2,16	0,9998
0,49	0,0300	0,83	0,5038	1,17	0,8706	1,51	0,9791	1,85	0,9979	2,17	0,9998
0,50	0,0361	0,84	0,5194	1,18	0,8765	1,52	0,9803	1,86	0,9980	2,18	0,9999
0,51	0,0428	0,85	0,5347	1,19	0,8823	1,53	0,9815	1,87	0,9981	2,19	0,9999
0,52	0,0503	0,86	0,5497	1,20	0,8877	1,54	0,9826	1,88	0,9983	2,20	0,9999
0,53	0,0585	0,87	0,5645	1,21	0,8930	1,55	0,9836	1,89	0,9984	2,21	0,9999
0,54	0,0675	0,88	0,5791	1,22	0,8981	1,56	0,9846	1,90	0,9985	2,22	0,9999
0,55	0,0772	0,89	0,5933	1,23	0,9030	1,57	0,9855	1,91	0,9986	2,23	0,9999
0,56	0,0876	0,90	0,6073	1,24	0,9076	1,58	0,9864	1,92	0,9987	2,24	0,9999
0,57	0,0987	0,91	0,6209	1,25	0,9121	1,59	0,9873	1,93	0,9988	2,25	0,9999
0,58	0,1104	0,92	0,6343	1,26	0,9164	1,60	0,9880	1,94	0,9989	2,26	0,9999
0,59	0,1228	0,93	0,6473	1,27	0,9206	1,61	0,9888	1,95	0,9990	2,27	0,9999
0,60	0,1357	0,94	0,6601	1,28	0,9245	1,62	0,9895	1,96	0,9991	2,28	0,9999
0,61	0,1492	0,95	0,6725	1,29	0,9283	1,63	0,9902	1,97	0,9991	2,29	0,9999
0,62	0,1632	0,96	0,6846	1,30	0,9319	1,64	0,9908	1,98	0,9992	2,30	0,9999
0,63	0,1778	0,97	0,6964	1,31	0,9354	1,65	0,9914	1,99	0,9993	2,31	1,0000
0,64	0,1927	0,98	0,7079	1,32	0,9387	1,66	0,9919				
0,65	0,2080	0,99	0,7191	1,33	0,9418	1,67	0,9924				

1.1.3. ИНТЕГРАЛЫ И СУММЫ РЯДОВ

1.1.3.1. Таблица сумм некоторых числовых рядов.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e.$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = \frac{1}{e}.$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2.$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{2}{3}.$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1.$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2}.$

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots = \frac{3}{4}.$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{11\cdot 13} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = \frac{1}{4}.$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+l-1)} = \frac{1}{1\cdot 2\ldots l} + \frac{1}{2\cdot 3\ldots(l+1)} + \ldots = \frac{1}{(l-1)\cdot(l-1)!}.$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$ 14) $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$ 16) $\sum_{n=1} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \ldots = \frac{7\pi^4}{720}.$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}.$

Числа Бернулли B_k

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = \frac{\pi^{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_k.$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2k}} = 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = \frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k.$

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \ldots = \frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!} B_k.$

Таблица первых чисел Бернулли

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$\frac{174611}{330}$	$\frac{854513}{138}$

Числа Эйлера E_k

22) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}=1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\cdot(2k)!}E_k.$$

Таблица первых чисел Эйлера

k	1	2	3	4	5	6	7
E_k	1	5	61	1385	50 521	2 702 765	199 360 981

1.1.3.2. Таблица разложения элементарных функций в степенные ряды.

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
	Биномиальный ряд
$(a \pm x)^m$ ($\lvert x\rvert \leqslant a$ при $m>0$) $\lvert x\rvert \leqslant a$ и $a \pm x \neq 0$ при $0>m>-1$, $\lvert x\rvert < a$ при $m \leqslant -1$	преобразованием к виду $a^m\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ сводится к нижеследующим рядам.
	Биномиальные ряды с положительным показателем
$(1 \pm x)^m$ ($m>0$) *) ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=1 \pm mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$
$(1 \pm x)^{1/4}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{1}{4}x-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots$
$(1 \pm x)^{1/3}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots$
$(1 \pm x)^{1/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots$
$(1 \pm x)^{3/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{5/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$
	Биномиальные ряды с отрицательным показателем
$(1 \pm x)^{-m}$ ($\lvert x\rvert < 1$ при $m \geqslant 1$; $\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$ при $0<m<1$)	$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n=1 \mp mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\ldots$
$(1 \pm x)^{-1/4}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$)	$1 \mp \frac{1}{4}x+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-1/3}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$)	$1 \mp \frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-1/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$)	$1 \mp \frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$

*) При m натуральном разложение содержит $m+1$ членов.

Продолжение

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
$(1 \pm x)^{-1}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$
$(1 \pm x)^{-3/2}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{3}{2} x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$
$(1 \pm x)^{-2}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$
$(1 \pm x)^{-5/2}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{5}{2} x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$
$(1 \pm x)^{-3}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2}(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \dots)$
$(1 \pm x)^{-4}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7x^4 + \dots)$
$(1 \pm x)^{-5}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8x^4 + \dots)$
	Тригонометрические функции
$\sin x$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
$\sin (x + a)$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sin (a + n\pi/2)}{n!} = \sin a + x \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \dots$
$\cos x$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\cos (x + a)$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cos (a + n\pi/2)}{n!} = \cos a - x \sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} + \frac{x^4 \cos a}{4!} - \dots$
$\operatorname{tg} x$ $(\|x\| < \pi/2)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$
$\operatorname{ctg} x$ $(0 < \|x\| < \pi)$	$\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots\right)$
$\sec x$ $(\|x\| < \pi/2)$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \frac{277}{8064} x^8 + \dots$
$\operatorname{cosec} x$ $(0 < \|x\| < \pi)$	$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} x + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15\,120} x^5 + \frac{127}{604\,800} x^7 + \dots$
	Показательные функции
e^x $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Продолжение

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
$a^x = e^{x \ln a}$ $(\lvert x \rvert < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots$
$\frac{x}{e^x - 1}$ $(\lvert x \rvert < 2\pi)$	$1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \dots$
	Логарифмические функции
$\ln x$ $(x > 0)$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots\right]$
$\ln x$ $(0 < x \leqslant 2)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$
$\ln x$ $(x > 1/2)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n x^n} = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots$
$\ln(1+x)$ $(-1 < x \leqslant 1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\ln(1-x)$ $(-1 \leqslant x < 1)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$
$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{Arth} x$ $(\lvert x \rvert < 1)$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$
$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{Arcth} x$ $(\lvert x \rvert > 1)$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) x^{2n+1}} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots\right)$
$\ln \lvert \sin x \rvert$ $(0 < \lvert x \rvert < \pi)$	$\ln \lvert x \rvert - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n(2n)!} = \ln \lvert x \rvert - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots$
$\ln \cos x$ $(\lvert x \rvert < \pi/2)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1) B_n x^{2n}}{n(2n)!} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots$
$\ln \lvert \operatorname{tg} x \rvert$ $(0 < \lvert x \rvert < \pi/2)$	$\ln \lvert x \rvert + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_n}{n(2n)!} x^{2n} = \ln \lvert x \rvert + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \dots$
	Обратные тригонометрические функции
$\arcsin x$ $(\lvert x \rvert \leqslant 1)$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$
$\arccos x$ $(\lvert x \rvert \leqslant 1)$	$\frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots\right)$

Продолжение

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
arctg x ($\|x\| \leqslant 1$)	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
arctg x ($\|x\| \geqslant 1$)	$\pm\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots$ *)
arcctg x ($\|x\| \leqslant 1$)	$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$
	Гиперболические функции
sh x ($\|x\| < \infty$)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$
ch x ($\|x\| < \infty$)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
th x ($\|x\| < \pi/2$)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n}\,(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \ldots$
cth x ($0 < \|x\| < \pi$)	$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots$
sch x ($\|x\| < \pi/2$)	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \ldots$
csch x ($0 < \|x\| < \pi$)	$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n\,(2^{2n-1}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15\,120} + \ldots$
	Обратные гиперболические функции
Arsh x ($\|x\| < 1$)	$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\,(2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$
Arch x**) ($x > 1$)	$\pm\left[\ln(2x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\cdot 2n} \frac{1}{x^{2n}}\right] = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots\right]$
Arth x ($\|x\| < 1$)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$
Arcth x ($\|x\| > 1$)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots$

*) Первый член берется со знаком + при $x > 1$ и со знаком − при $x < -1$.

**) Функция двузначная (см. 1.2.2.3)

1.1.3.3. Таблица неопределенных интегралов.

Общие указания. 1. Постоянная интегрирования опущена всюду, за исключением случаев, когда интеграл может быть представлен в различных формах с различными произвольными постоянными.

2. Во всех формулах, где в состав первообразной функции входит выражение, содержащее $\ln f(x)$, его следует понимать как $\ln|f(x)|$; знак абсолютной величины везде для простоты опущен.

3. В тех случаях, когда первообразная функция представлена в виде степенного ряда, ее нельзя выразить через конечное число элементарных функций.

1.1.3.3.1. Интегралы от рациональных функций.

Интегралы, содержащие $ax + b$.

Обозначение: $X = ax + b$.

1) $\int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1$; при $n = -1$ см. № 2). 2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$.

3) $\int xX^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1, -2$; при $n = -1, -2$ см. №№ 5 и 6).

4) $\int x^n X^m dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n dX$

(применяется при $m < n$ или при m целом и n дробном, в этих случаях $(X-b)^m$ раскрывается по формуле бинома Ньютона (см. 2.2.2.1); $n \neq -1, -2, \ldots, -m$).

5) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X$. 6) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X$. 7) $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2}\right)$.

8) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}}\right)$ ($n \neq 1, 2$).

9) $\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}X^2 - 2bX + b^2 \ln X\right)$. 10) $\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3}\left(X - 2b\ln X - \frac{b^2}{X}\right)$.

11) $\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right)$.

12) $\int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}}\right]$ ($n \neq 1, 2, 3$).

13) $\int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2 X - b^3 \ln X\right)$.

14) $\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X}\right)$. 15) $\int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{a^4}\left(X - 3b\ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2}\right)$.

16) $\int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3}\right)$.

17) $\int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}}\right]$ ($n \neq 1, 2, 3, 4$).

18) $\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}$. 19) $\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln \frac{X}{x} - \frac{ax}{X}\right)$.

20) $\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln \frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2}\right)$. 21) $\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n}\left[\ln \frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right]$ ($n \geqslant 2$).

22) $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}$. 23) $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -a\left[\frac{1}{b^2 X} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2}{b^3} \ln \frac{X}{x}\right]$.

24) $\int \frac{dx}{x^2 X^3} = -a\left[\frac{1}{2b^2 X^2} + \frac{2}{b^3 X} + \frac{1}{ab^3 x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{X}{x}\right]$.

25) $\int \frac{dx}{x^2 X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left[-\sum_{i=2}^{n} C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na \ln \frac{X}{x}\right]$ ($n \geqslant 2$).

26) $\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{b^3}\left[a^2 \ln \frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2}\right]$.

27) $\int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{a^3 x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right]$.

28) $\int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{4a^3 x}{X} - \frac{a^4 x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right]$.

29) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^i \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2}\ln\frac{X}{x}\right] \quad (n \geqslant 3).$

30) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}}\sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^i \frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}}$

[если знаменатель члена под знаком $\sum$ обращается в нуль, то такой член заменяется следующим: $C_{m+n-2}^{m-1}(-a)^{m-1}\ln\frac{X}{x}$].

Обозначение: $\Delta = bf - ag$.

31) $\displaystyle\int \frac{ax+b}{fx+g}dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2}\ln(fx+g).$ 32) $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0).$

33) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{g}{f}\ln(fx+g)\right] \quad (\Delta \neq 0).$

34) $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}\right) \quad (\Delta \neq 0).$

35) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

36) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2}\ln(a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2}\ln(b+x) \quad (a \neq b).$

37) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

38) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

39) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

Интегралы, содержащие ax^2+bx+c.

Обозначения: $X = ax^2+bx+c$, $\Delta = 4ac - b^2$.

40) $\displaystyle\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\text{для } \Delta > 0), \\ -\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Arth}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\dfrac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} & (\text{для } \Delta < 0). \end{cases}$

41) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

42) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

43) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$ 44) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln X - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

45) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40). 46) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$

47) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

48) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

49) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a}\int\frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a}\int\frac{x\,dx}{X^n}$ (см. № 43, 46).

50) $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$

($m \neq 2n-1$; при $m = 2n-1$ см. № 51).

51) $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{X^n} = \frac{1}{a}\int\frac{x^{2n-3}\,dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a}\int\frac{x^{2n-3}\,dx}{X^n} - \frac{b}{a}\int\frac{x^{2n-2}\,dx}{X^n}.$

52) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

53) $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c}\int\frac{dx}{xX^{n-1}}$.

54) $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2}\ln\frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right)\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

55) $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-1}X^n}$ $(m > 1)$.

56) $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2 - gbf + g^2a)}\left[f\ln\frac{(fx+g)^2}{X}\right] + \frac{2ga - bf}{2(cf^2 - gbf + g^2a)}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

Интегралы, содержащие $a^2 \pm x^2$.

Обозначения:

$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} & \text{для знака } +, \\ \operatorname{Arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+x}{a-x} & \text{для знака } - \text{ при } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a} & \text{для знака } - \text{ при } |x| > a. \end{cases}$$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + x^2$, а нижний – к $X = a^2 - x^2$.

57) $\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{a}Y$. 58) $\int\frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3}Y$. 59) $\int\frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5}Y$.

60) $\int\frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{dx}{X^n}$. 61) $\int\frac{x\,dx}{X} = \pm\frac{1}{2}\ln X$. 62) $\int\frac{x\,dx}{X^2} = \mp\frac{1}{2X}$.

63) $\int\frac{x\,dx}{X^3} = \mp\frac{1}{4X^2}$. 64) $\int\frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{1}{2nX^n}$ $(n \neq 0)$.

65) $\int\frac{x^2\,dx}{X} = \pm x \mp aY$. 66) $\int\frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp\frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a}Y$.

67) $\int\frac{x^2\,dx}{X^3} = \mp\frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3}Y$. 68) $\int\frac{x^2\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n}\int\frac{dx}{X^n}$ $(n \neq 0)$.

69) $\int\frac{x^3\,dx}{X} = \pm\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln X$. 70) $\int\frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln X$. 71) $\int\frac{x^3\,dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}$.

72) $\int\frac{x^3\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $(n > 1)$. 73) $\int\frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}$.

74) $\int\frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$. 75) $\int\frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

76) $\int\frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y$. 77) $\int\frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y$.

78) $\int\frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y$. 79) $\int\frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$.

80) $\int\frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}$. 81) $\int\frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$.

82) $\int\frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \pm b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \pm \frac{b}{2}Y\right]$.

Интегралы, содержащие $a^3 \pm x^3$.

Обозначение: $X = a^3 \pm x^3$; в случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^3 + x^3$, а нижний – к $X = a^3 - x^3$.

83) $\int\frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$. 84) $\int\frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 83).

85) $\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$.

86) $\int\frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^2X} + \frac{1}{3a^3}\int\frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85). 87) $\int\frac{x^2\,dx}{X} = \pm\frac{1}{3}\ln X$.

88) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}$. 89) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm x \mp a^3 \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

90) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83). 91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{X}$.

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{X}$. 93) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^3x} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

94) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x^2}{3a^6X} \mp \frac{4}{3a^6} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

95) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^3x^2} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

96) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{x}{3a^6X} \mp \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

Интегралы, содержащие $a^4 + x^4$.

97) $\int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$.

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}$.

99) $\int \frac{x^2\,dx}{a^4 + x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$.

100) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4} \ln (a^4 + x^4)$.

Интегралы, содержащие $a^4 - x^4$.

101) $\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a + x}{a - x} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. 102) $\int \frac{x\,dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

103) $\int \frac{x^2dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \ln \frac{a + x}{a - x} - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. 104) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{4} \ln (a^4 - x^4)$.

Некоторые случаи разложения дроби на элементарные.

105) $\frac{1}{(a + bx)(f + gx)} \equiv \frac{1}{fb - ag} \left(\frac{b}{a + bx} - \frac{g}{f + gx} \right)$.

106) $\frac{1}{(x + a)(x + b)(x + c)} \equiv \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} + \frac{C}{x + c}$,

где $A = \frac{1}{(b - a)(c - a)}$, $B = \frac{1}{(a - b)(c - b)}$, $C = \frac{1}{(a - c)(b - c)}$.

107) $\frac{1}{(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)} \equiv \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} + \frac{C}{x + c} + \frac{D}{x + d}$,

где $A = \frac{1}{(b - a)(c - a)(d - a)}$, $B = \frac{1}{(a - b)(c - b)(d - b)}$ и т. д.

108) $\frac{1}{(a + bx^2)(f + gx^2)} \equiv \frac{1}{fb - ag} \left(\frac{b}{a + bx^2} - \frac{g}{f + gx^2} \right)$.

1.1.3.3.2. Интегралы от иррациональных функций.

Интегралы, содержащие $\sqrt{x}$ *и* $a^2 \pm b^2x$.

Обозначения:

$$X = a^2 \pm b^2x, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{x}}{a} & \text{для знака } +, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{a + b\sqrt{x}}{a - b\sqrt{x}} & \text{для знака } -. \end{cases}$$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + b^2x$, а нижний – к $X = a^2 - b^2x$.

109) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm \frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3} Y$. 110) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X} = \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} Y$.

111) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp \frac{\sqrt{x}}{b^2X} \pm \frac{1}{ab^3} Y$. 112) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm \frac{2\sqrt{x^3}}{b^2X} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4X} - \frac{3a}{b^5} Y$.

113) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab}Y.$ 114) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3}Y.$

115) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2X} + \frac{1}{a^3b}Y.$ 116) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X} \mp \frac{3b}{a^5}Y.$

Другие интегралы, содержащие $\sqrt{x}$.

117) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4+x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

118) $\int \frac{dx}{(a^4+x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

119) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$ 120) $\int \frac{dx}{(a^4-x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} + \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$.

Обозначение: $X = ax + b$.

121) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{b}{3a}\sqrt{X^3}.$ 122) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$

123) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$ 124) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$

125) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{X}.$ 126) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}.$

127) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{X}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{X}-\sqrt{b}}{\sqrt{X}+\sqrt{b}} & \text{для } b>0, \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{X}{-b}} & \text{для } b<0. \end{cases}$

128) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = 2\sqrt{X} + b\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

129) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

130) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

131) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}.$ 132) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}.$

133) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}(5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5}).$ 134) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right).$

135) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

136) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right).$ 137) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right).$

138) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

139) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127). 140) $\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}.$

141) $\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

142) $\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

143) $\int \frac{X^{n/2}\,dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int\frac{X^{(n-2)/2}}{x}dx.$ 144) $\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}.$

145) $\int \frac{dx}{x^2 X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$ *и* $\sqrt{fx+g}$.
Обозначения: $X = ax + b$, $Y = fx + g$, $\Delta = bf - ag$.

146) $\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-af}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{fX}{aY}} & \text{для } af < 0, \\ \frac{2}{\sqrt{af}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{fX}{aY}} = \frac{1}{2\sqrt{af}} \ln (\sqrt{aY} + \sqrt{fX}) & \text{для } af > 0. \end{cases}$

147) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146). 148) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}$

149) $\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta f}} \operatorname{arctg} \frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{для } \Delta f < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \ln \frac{f\sqrt{X} - \sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X} + \sqrt{\Delta f}} & \text{для } \Delta f > 0. \end{cases}$

150) $\int \sqrt{XY}dx = \frac{\Delta + 2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146).

151) $\int \sqrt{\frac{Y}{X}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146).

152) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (см. № 149).

153) $\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a}\left(\sqrt{X}\,Y^n - n\Delta \int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}}\right).$

154) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta}\left[\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2}\right)a \int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right].$

155) $\int \sqrt{X}\,Y^n\,dx = \frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}\,Y^{n+1} + \Delta \int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}}\right)$ (см. № 153).

156) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{YY^{n-1}}}\right).$

Интегралы, содержащие $\sqrt{a^2 - x^2}$.
Обозначение: $X = a^2 - x^2$.

157) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right).$ 158) $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

159) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right).$ 160) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}.$

161) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 162) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}.$

163) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 164) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin\frac{x}{a}.$ 165) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}.$

166) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$ 167) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

168) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 169) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

170) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

171) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right).$ 172) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

173) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}.$

174) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$ 175) $\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

176) $\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3x\sqrt{X}}{2} - \frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

177) $\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 178) $\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$ 179) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$

180) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin\frac{x}{a}.$ 181) $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

182) $\int\frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 183) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

184) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2+a^2}$.
Обозначение: $X = x^2 + a^2$.

185) $\int\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2}[x\sqrt{X} + a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

186) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

187) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}[x\sqrt{X} + a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

188) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$ 189) $\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

190) $\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \mathrm{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

191) $\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 192) $\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \mathrm{Arsh}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

193) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$ 194) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

195) $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$ 196) $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

197) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$ 198) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

199) $\int\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1.$

200) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

201) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

202) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$ 203) $\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

204) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

205) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 206) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

207) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$ 208) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

209) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$ 210) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

211) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

212) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2-a^2}$.
Обозначение: $X = x^2 - a^2$.

213) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

214) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

215) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

216) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$ 217) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} - a\arccos\frac{a}{x}.$

218) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

219) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$ 220) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

221) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$ 222) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{2} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

223) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$ 224) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$

225) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$ 226) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}.$

227) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1.$$

228) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

229) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

230) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$ 231) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3\arccos\frac{a}{x}.$

232) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} - \frac{3a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} - \frac{3a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

233) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3a}{2}\arccos\frac{a}{x}$. 234) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}$.

235) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}$. 236) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1$.

237) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}$. 238) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x}$.

239) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right)$. 240) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$, $k = \frac{4a}{\Delta}$.

241) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{aX} + 2ax + b) + C & \text{для } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } a > 0,\ \Delta > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b) & \text{для } a > 0,\ \Delta = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{для } a < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$$

242) $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}$. 243) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right)$.

244) $\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}$.

245) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

246) $\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

247) $\int X^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

248) $\int X^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,dx$.

249) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241). 250) $\int \frac{x\,dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}$.

251) $\int \frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$ (см. № 244).

252) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

253) $\int \frac{x^2\,dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

254) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X} - \frac{b}{4ak}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

255) $\int xX\sqrt{X}\,dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,dx$ (см. № 246).

256) $\int xX^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,dx$ (см. № 248).

257) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{X}\,dx$ (см. № 245).

$$258)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\dfrac{2\sqrt{cX}}{x} + \dfrac{2c}{x} + b\right) + C & \text{для } c > 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{Arsh}\dfrac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } c > 0,\ \Delta > 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\dfrac{bx+2c}{x} & \text{для } c > 0,\ \Delta = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\dfrac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{для } c < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$259)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad \text{(см. № 258).}$$

$$260)\ \int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad \text{(см. № 241, 258).}$$

$$261)\ \int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad \text{(см. № 241, 258).}$$

$$262)\ \int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x}dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx + c\int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x}dx \quad \text{(см. № 248, 260).}$$

Интегралы, содержащие другие иррациональные выражения.

$$263)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}. \qquad 264)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}.$$

$$265)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

$$266)\ \int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

$$267)\ \int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}} & (ag-bf>0), \\ \dfrac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf-ag}}\ln\dfrac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}} & (ag-bf<0). \end{cases}$$

$$268)\ \int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}. \qquad 269)\ \int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\,\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}.$$

$$270)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}. \qquad 271)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na}\arccos\frac{a}{\sqrt{x^n}}.$$

$$272)\ \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$$

Рекуррентные формулы для интеграла от дифференциального бинома.

$$273)\ \int x^m(ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m(ax^n+b)^{p+1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}(ax^n+b)^p\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{a(m+np+1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx\right].$$

1.1.3.3.3. Интегралы от тригонометрических функций.

Интегралы, содержащие синус.

$$274)\ \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax. \qquad 275)\ \int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

276) $\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$ 277) $\int \sin^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$

278) $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$ ($n > 0$ – целое).

279) $\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$ 280) $\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$

281) $\int x^3\sin ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$

282) $\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$ $(n > 0)$.

283) $\int \frac{\sin ax}{x}dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \ldots$ *).

284) $\int \frac{\sin ax}{x^2}dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax\,dx}{x}$ (см. № 322).

285) $\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$ (см. № 324).

286) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax).$

287) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$ 288) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

289) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n > 1)$.

290) $\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left(ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots \right.$
$\left.\ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n(ax)^{2n+1} + \ldots\right)$ **).

291) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\sin ax.$

292) $\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)a\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n > 2)$.

293) $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$ 294) $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

295) $\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

296) $\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

297) $\int \frac{\sin ax\,dx}{1\pm\sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right).$

298) $\int \frac{dx}{\sin ax(1\pm\sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

299) $\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

---

*) Определенный интеграл $\int_0^x \frac{\sin t\,dt}{t}$ называется *интегральным синусом*:

$$\operatorname{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

**) B_n – числа Бернулли.

300) $\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$

301) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$

302) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$

303) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} ax).$

304) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$

305) $\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ $(|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 275).

306) $$\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+c}{\sqrt{b^2-c^2}} & (b^2 > c^2), \\ \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}\right)+c-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}\right)+c+\sqrt{c^2-b^2}} & (b^2 < c^2). \end{cases}$$

307) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

308) $\int \frac{dx}{\sin ax(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

309) $\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} + \frac{b}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

310) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)} + \frac{c}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

311) $\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b > 0)$.

312) $\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b^2 > c^2,\ b > 0)$,

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax - b}$ $(c^2 > b^2,\ b > 0)$.

Интегралы, содержащие косинус.

313) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$ 314) $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$

315) $\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax.$ 316) $\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$

317) $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$

318) $\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$ 319) $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$

320) $\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax.$

321) $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$

322) $\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \ldots$ *).

323) $\int \frac{\cos ax\, dx}{x^2} = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax\, dx}{x}$ (см. № 283).

324) $\int \frac{\cos ax\, dx}{x^n} = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax\, dx}{x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 285).

325) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax)$.

326) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax$. 327) $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a \cos^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$.

328) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1)$.

329) $\int \frac{x\, dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10 \cdot 8!} + \ldots + \frac{E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \ldots\right]$ **).

330) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax$.

331) $\int \frac{x\, dx}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{(n-1) a \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2) a^2 \cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 2)$.

332) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$. 333) $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}$.

334) $\int \frac{x\, dx}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2}$. 335) $\int \frac{x\, dx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2}$.

336) $\int \frac{\cos ax\, dx}{1 + \cos ax} = x - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$. 337) $\int \frac{\cos ax\, dx}{1 - \cos ax} = -x - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}$.

338) $\int \frac{dx}{\cos ax(1 + \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$.

339) $\int \frac{dx}{\cos ax(1 - \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}$.

340) $\int \frac{dx}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{ax}{2}$. 341) $\int \frac{dx}{(1 - \cos ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{ax}{2}$.

342) $\int \frac{\cos ax\, dx}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{ax}{2}$. 343) $\int \frac{\cos ax\, dx}{(1 - \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{ax}{2}$.

344) $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}\, a} \arcsin \frac{1 - 3\cos^2 ax}{1 + \cos^2 ax}$. 345) $\int \frac{dx}{1 - \cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax$.

346) $\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ $(|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 314).

347) $$\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{(b-c) \operatorname{tg} \frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} & (b^2 > c^2), \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \dfrac{(c-b) \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \sqrt{c^2 - b^2}}{(c-b) \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \sqrt{c^2 - b^2}} & (b^2 < c^2). \end{cases}$$

---

*) Определенный интеграл $-\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ $(x > 0)$ называется *интегральным косинусом* и обозначается $\operatorname{Ci}(x)$:

$$\operatorname{Ci}(x) = C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \ldots,$$

где C – постоянная Эйлера.

**) E_n – числа Эйлера.

348) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b+c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (см. № 347).

349) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(b+c\cos ax)} = \frac{1}{ab}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (см. № 347).

350) $\int \frac{dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2-b^2)(b+c\cos ax)} - \frac{b}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (см. № 347).

351) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2-c^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (см. № 347).

352) $\int \frac{dx}{b^2+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}$ $(b>0)$.

353) $$\int \frac{dx}{b^2-c^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}} & (b^2>c^2,\ b>0),\\ \dfrac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\dfrac{b\operatorname{tg} ax-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax+\sqrt{c^2-b^2}} & (c^2>b^2,\ b>0).\end{cases}$$

Интегралы, содержащие синус и косинус.

354) $\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax.$ 355) $\int \sin^2 ax\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$

356) $\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax$ $(n \neq -1)$.

357) $\int \sin ax\cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax$ $(n \neq -1)$.

358) $\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} ax\cos^m ax\,dx$

(понижение степени n; $m>0$ и $n>0$),

$= \frac{\sin^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax\cos^{m-2} ax\,dx$

(понижение степени m; $m>0$ и $n>0$).

359) $\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg} ax.$ 360) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{\sin ax}\right].$

361) $\int \frac{dx}{\sin ax\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax}\right).$ 362) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax\cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax - \frac{1}{2\sin^2 ax}\right).$

363) $\int \frac{dx}{\sin ax\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax + \frac{1}{2\cos^2 ax}\right).$ 364) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos^2 ax} = -\frac{2}{a}\operatorname{ctg} 2ax.$

365) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right].$

366) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2\sin^2 ax} + \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

367) $\int \frac{dx}{\sin ax\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax\cos^{n-2} ax}$ $(n \neq 1)$ (см. № 361, 363).

368) $\int \frac{dx}{\sin^n ax\cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax\cos ax}$ $(n \neq 1)$ (см. № 360, 362).

369) $\int \frac{dx}{\sin^n ax\cos^m ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\,\frac{1}{\sin^{n-1} ax\cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax\cos^m ax}$

(понижение степени n; $m>0$ и $n>1$),

$= \frac{1}{a(m-1)}\,\frac{1}{\sin^{n-1} ax\cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^n ax\cos^{m-2} ax}$

(понижение степени m; $n>0$ и $m>1$).

370) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax} = \frac{1}{a}\sec ax.$ 371) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a\cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C_1.$

372) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$ 373) $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

374) $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$

375) $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n \neq 1)$ (см. № 325, 326, 328).

376) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln\cos ax\right).$ 377) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$

378) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right]$ $(n \neq 1,\ n \neq 3).$

379) $\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos ax}$ $(n \neq 1).$

380) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax}dx = \begin{cases} \dfrac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \dfrac{n-m+2}{m-1}\displaystyle\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax}dx & (m \neq 1), \\ -\dfrac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} - \dfrac{n-1}{n-m}\displaystyle\int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos^m ax} & (m \neq n), \\ \dfrac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \dfrac{n-1}{m-1}\displaystyle\int \frac{\sin^{n-1} ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} & (m \neq 1). \end{cases}$$

381) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec} ax.$

382) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$ 383) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax}.$

384) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$ 385) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

386) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} dx}\right)$ $(n \neq 1)$ (см. № 289).

387) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln\sin ax\right).$ 388) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right).$

389) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right]$ $(n \neq 1,\ n \neq 3).$

390) $\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax}$ $(n \neq 1).$

391) $$\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} = \begin{cases} -\dfrac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \dfrac{n-m+2}{m-1}\displaystyle\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} & (m \neq 1), \\ \dfrac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \dfrac{n-1}{n-m}\displaystyle\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} & (m \neq n), \\ -\dfrac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \dfrac{n-1}{m-1}\displaystyle\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} & (m \neq 1). \end{cases}$$

392) $\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

393) $\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \mp\frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

394) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$ 395) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}.$

396) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

397) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

398) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

399) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

400) $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right).$ 401) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm\frac{1}{a}\ln\left(1 \pm \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

402) $\int \frac{dx}{b\sin ax + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}}\ln \operatorname{tg}\frac{ax + \theta}{2},$ где $\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b}.$

403) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c\cos ax} = -\frac{1}{ac}\ln(b + c\cos ax).$ 404) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\sin ax} = \frac{1}{ac}\ln(b + c\sin ax).$

405) $\int \frac{dx}{b + c\cos ax + f\sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2 + f^2}\sin(ax + \theta)},$ где $\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{f}$

(см. № 306).

406) $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax + c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{abc}\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} ax\right).$ 407) $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax - c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln\frac{c\operatorname{tg} ax + b}{c\operatorname{tg} ax - b}.$

408) $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)} - \frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)}$ ($a^2 \neq b^2$; при $a = b$ см. № 354).

Интегралы, содержащие тангенс.

409) $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax.$ 410) $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$

411) $\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a}\ln\cos ax.$ 412) $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx.$

413) $\int x\operatorname{tg} ax\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \ldots$ *).

414) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n - 1)(2n)!} + \ldots$ *).

415) $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a(n + 1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax$ $(n \neq -1).$

416) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$ 417) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

Интегралы, содержащие котангенс.

418) $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax.$ 419) $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$

420) $\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} - \frac{\ln\sin ax}{a}.$ 421) $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx$ $(n \neq 1).$

422) $\int x\operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n + 1)!} - \ldots$ *).

423) $\int \frac{\operatorname{ctg} ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n - 1)(2n)!} - \ldots$ *).

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax}dx = -\frac{1}{a(n + 1)}\operatorname{ctg}^{n+1} ax$ $(n \neq -1).$ 425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (см. № 417).

1.1.3.3.4. Интегралы от других трансцендентных функций.
Интегралы от гиперболических функций.

426) $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax.$ 427) $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax.$

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} ax - \frac{1}{2}x.$ 429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} ax + \frac{1}{2}x.$

*) B_n – числа Бернулли.

430) $\int \operatorname{sh}^n ax\,dx = \begin{cases} \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx & (n>0), \\ \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx & (n<0;\ n\neq -1). \end{cases}$

431) $\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \begin{cases} \frac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx & (n>0), \\ -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,dx & (n<0;\ n\neq -1). \end{cases}$

432) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{th}\frac{ax}{2}$. 433) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax}$.

434) $\int x \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}x\operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax$. 435) $\int x\operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}x\operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax$.

436) $\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{ch} ax$. 437) $\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{sh} ax$. 438) $\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}$.

439) $\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}$. 440) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a\operatorname{sh} bx\operatorname{ch} ax - b\operatorname{ch} bx\operatorname{sh} ax)$ $(a^2\neq b^2)$.

441) $\int \operatorname{ch} ax\operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} bx - b\operatorname{sh} bx\operatorname{ch} ax)$ $(a^2\neq b^2)$.

442) $\int \operatorname{ch} ax\operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a\operatorname{sh} bx\operatorname{sh} ax - b\operatorname{ch} bx\operatorname{ch} ax)$ $(a^2\neq b^2)$.

443) $\int \operatorname{sh} ax\sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax\sin ax - \operatorname{sh} ax\cos ax)$.

444) $\int \operatorname{ch} ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax\cos ax + \operatorname{ch} ax\sin ax)$.

445) $\int \operatorname{sh} ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax\cos ax + \operatorname{sh} ax\sin ax)$.

446) $\int \operatorname{ch} ax\sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax\sin ax - \operatorname{ch} ax\cos ax)$.

Интегралы от показательных функций.

447) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$. 448) $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$. 449) $\int x^2e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$.

450) $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$. 451) $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$ *).

452) $\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int\frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx\right)$ $(n\neq 1)$. 453) $\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}$.

454) $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax})$. 455) $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax})$.

456) $\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{arctg}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right) & (ac>0), \\ \frac{1}{2a\sqrt{-bc}}\ln\frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}} & (bc<0). \end{cases}$

---

*) Определенный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ называется *интегральной показательной функцией* и обозначается $\operatorname{Ei}(x)$. При $x>0$ интеграл расходится в точке $t=0$; в этом случае под $\operatorname{Ei}(x)$ понимается главное значение несобственного интеграла (см. 3.1.7.7):

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots,$$

где C – постоянная Эйлера.

457) $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$. 458) $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}\,dx}{x}$ (см. № 451).

459) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$. 460) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$.

461) $\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$ (см. № 447, 459).

462) $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$ (см. № 447, 460).

463) $\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx]$.

464) $\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx]$.

Интегралы от логарифмических функций.

465) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$. 466) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.

467) $\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x$.

468) $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$ $(n \neq -1)$.

469) $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$ *).

470) $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 469).

471) $\int x^m\ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right]$ $(m \neq -1)$.

472) $\int x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx$ $(m \neq -1,\ n \neq -1)$ (см. № 470).

473) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$. 474) $\int \frac{\ln x}{x^m}dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2x^{m-1}}$ $(m \neq 1)$.

475) $\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}dx$ $(m \neq 1)$ (см. № 474).

476) $\int \frac{x^m\,dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}dy$, где $y = -(m+1)\ln x$ (см. № 451).

477) $\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$. 478) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x$.

479) $\int \frac{dx}{x^n\ln x} = \ln\ln x - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$

480) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$.

481) $\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1}\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$.

482) $\int \ln\sin x\,dx = x\ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \ldots - \frac{2^{2n-1}B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \ldots$ **).

483) $\int \ln\cos x\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \ldots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} - \ldots$ **).

484) $\int \ln\operatorname{tg} x\,dx = x\ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$ **).

485) $\int \sin\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x)$. 486) $\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x)$.

---

*) Определенный интеграл $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ называется *интегральным логарифмом* и обозначается $\operatorname{li} x$. При $x > 1$ интеграл расходится в точке $t = 1$; в этом случае под интегралом понимается главное значение несобственного интеграла. Интегральный логарифм связан с интегральной показательной функцией: $\operatorname{li} x = \operatorname{Ei}(\ln x)$.

**) B_n – числа Бернулли.

487) $\int \frac{\ln(1+x)}{x}dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \ldots$

Интегралы от обратных тригонометрических функций.

488) $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}.$ 489) $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}.$

490) $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}.$

491) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots$

492) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$ 493) $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}.$

494) $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}.$

495) $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}.$

496) $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} - \ldots$

497) $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$

498) $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$ 499) $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$

500) $\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$

501) $\int x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2}$ $(n \neq -1).$

502) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} + \ldots$ $(|x| < |a|).$

503) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

504) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)}$ $(n \neq 1).$

505) $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$ 506) $\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

507) $\int x^2\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$

508) $\int x^n\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2}$ $(n \neq -1).$

509) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} - \frac{x^5}{5^2a^5} + \frac{x^7}{7^2a^7} - \ldots$

510) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

511) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)}$ $(n \neq 1)$.

Интегралы от обратных гиперболических функций.

512) $\displaystyle\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$. 513) $\displaystyle\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}$.

514) $\displaystyle\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$. 515) $\displaystyle\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)$.

1.1.3.4. Таблица некоторых определенных интегралов *).

1.1.3.4.1. Интегралы от показательных функций (в сочетании с алгебраическими, тригонометрическими и логарифмическими).

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$ **) $(a > 0,\ n > -1)$.

В частности, при натуральном n этот интеграл равен $n!/a^{n+1}$.

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}$ $(a > 0,\ n > -1)$.

В частности, при n целом и четном ($n = 2k$) этот интеграл равен $\dfrac{1\cdot 3\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}\cdot a^{k+1/2}}$, а при n целом и нечетном ($n = 2k+1$) он равен $\dfrac{k!}{2a^{k+1}}$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ $(a > 0)$. 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ $(a > 0)$.

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-b^2/(4a^2)}$ $(a > 0)$. 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}$. 7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}$.

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ $(a > 0)$. 9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772$ ***).

10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln x\,dx = \frac{1}{4}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C + 2\ln 2)$ ***).

11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln^2 x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C+2\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]$ ***).

1.1.3.4.2. Интегралы от тригонометрических функций (в сочетании с алгебраическими).

12) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2\alpha+1}x\cos^{2\beta+1}x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{2}B(\alpha+1,\ \beta+1) = \frac{\alpha!\beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}$ ****).

---

*) Более полные таблицы определенных интегралов см.: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971; Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.

**) Γ — гамма-функция.

***) C — постоянная Эйлера.

****) $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ — бета-функция, или эйлеров интеграл 1-го рода; $\Gamma(x)$ — гамма-функция, или эйлеров интеграл 2-го рода.

Эта формула справедлива для любых α и β (последнее равенство – при α и β натуральных); может применяться для $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx$, $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x}\,dx$, $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$ и т. п.

13) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0. \end{cases}$$

14) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{x}\,dx = 2^{p-2}\frac{[\Gamma(p/2)]^2}{\Gamma(p)},$$

если p – рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

15) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^s}\,dx = \frac{\pi a^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin(s\pi/2)}, \quad 0 < s < 2.$$

16) $$\int\limits_0^{\alpha} \frac{\cos ax\,dx}{x} = \infty \quad (\alpha \neq 0,\ a \text{ – произвольное число}).$$

17) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^s}\,dx = \frac{\pi a^{s-1}}{2\Gamma(s)\cos(s\pi/2)} \quad (0 < s < 1).$$

18) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0. \end{cases}$$

19) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} \quad (a,\ b > 0).$$

20) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |a| < 1, \\ \frac{\pi}{4}, & |a| = 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases}$$

21) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

22) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|ab|} \operatorname{sign} a.$$

23) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

24) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|.$$

25) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

26) $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}, \quad |k| < 1.$$

27) $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k}\arcsin k, \quad |k| < 1.$$

28) $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}(\mathrm{K} - \mathrm{E})^{*)} \quad (|k| < 1).$$

29) $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}[\mathrm{E} - (1 - k^2)\mathrm{K}]^{*)} \quad (|k| < 1).$$

30) $$\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos ax\,dx}{1 - 2b\cos x + b^2} = \frac{\pi b^a}{1 - b^2} \quad (a \geqslant 0 \text{ – целое},\ |b| < 1).$$

1.1.3.4.3. Интегралы от логарифмических функций (в сочетании с алгебраическими и тригонометрическими).

31) $$\int\limits_0^{1} \ln\ln\frac{1}{x}\,dx = -C \approx -0{,}5772^{**)}.$$

32) $$\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{x - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{сводится к № 6}).$$

---

*) E и K – *полные эллиптические интегралы*: $\mathrm{E} = \mathrm{E}(k, \pi/2)$, $\mathrm{K} = F(k, \pi/2)$.

**) C – постоянная Эйлера.

33) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (сводится к № 7). 34) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$. 35) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

36) $\int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x)\ln x}\,dx = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1,\ \alpha+\beta > -1)$.

37) $\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{(1+x)\ln x}\,dx = \ln\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}$ $(0 < a < 1)$. 38) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1)$ *) $(-1 < a < \infty)$.

39) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. 40) $\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

41) $\int_0^{\pi/2} \sin x\ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1$. 42) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ln x\,dx = -\frac{\pi}{2}(C+\ln a)$ *) $(a > 0)$.

43) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ln^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}C^2 + \frac{\pi^3}{24} + \pi C\ln a + \frac{\pi}{2}\ln^2 a$ $(a > 0)$.

44) $\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ $(a \geqslant b)$.

45) $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi\ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

46) $\int_0^{\pi/2} \ln\operatorname{tg} x\,dx = 0$. 47) $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

1.1.3.4.4. Интегралы от алгебраических функций.

48) $\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^\beta\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \mathrm{B}(\alpha+1,\ \beta+1)$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$ **).

(сводится к № 10).

49) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ $(0 < a < 1)$. 50) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)x^a} = -\pi\operatorname{ctg} a\pi$ $(0 < a < 1)$.

51) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b\sin\frac{a\pi}{b}}$ $(0 < a < b)$. 52) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}$ $(a > 0)$.

53) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{2\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$. 54) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$.

---

*) C – постоянная Эйлера.

**) $\mathrm{B}(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ – бета-функция, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

1.2. ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Действительная функция от действительного переменного x – это однозначное отображение f подмножества действительных чисел во множество действительных чисел: $y = f(x)$. Множество точек с координатами $(x, f(x))$ называется *графиком функции*. Графики функций – это в общем случае кривые, которые пересекаются с каждой прямой, параллельной оси y, не более чем в одной точке (см. также 2.4).

1.2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.2.1.1. Целые рациональные функции.

Постоянные функции. Функция $y = 0$ отображает каждое действительное число x в число нуль. Считается, что она не является никакой (конечной) степенью аргумента. Ее график – ось x. Функция $y = a$ $(a \neq 0)$ есть функция нулевой степени от аргумента. Графиком такой функции является прямая, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке $(0, a)$.

Линейные функции: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Графиком такой функции является прямая, проходящая через точки $A(-b/a, 0)$ и $B(0, b)$ (рис. 1.7, *а*). При $b = 0$ точки A и B совпадают

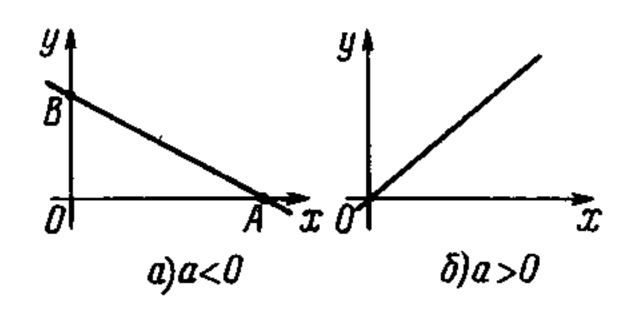


Рис. 1.7

и прямая проходит через начало координат (рис. 1.7, *б*).

Функция имеет один нуль:

$$x_0 = -b/a.$$

Если $a > 0$, то функция монотонно возрастает; если $a < 0$, то она монотонно убывает. Если $b = 0$ и $a > 0$, то говорят, что *y прямо пропорционально x*, а a называют *коэффициентом пропорциональности*.

Квадратичные функции: $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. График – парабола с осью симметрии,

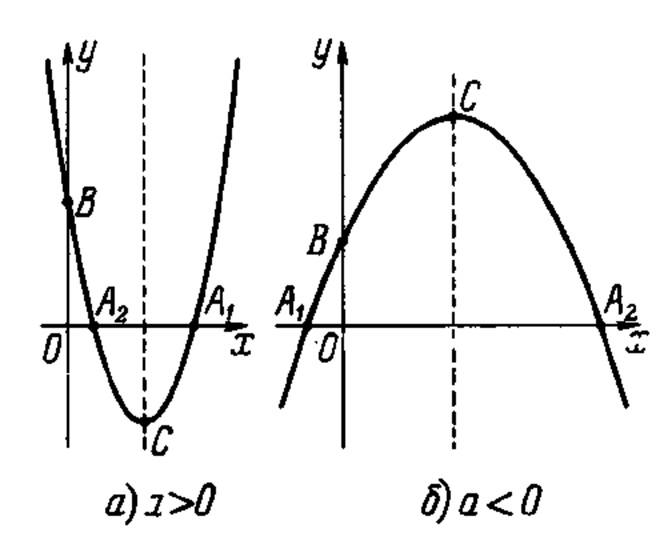


Рис. 1.8

параллельной оси y, и вершиной $C(-b/(2a), (4ac - b^2)/(4a))$ (рис. 1.8). Функция имеет не больше двух нулей. График пересекает ось y в точке $B(0, c)$. В случае $\Delta = 4ac - b^2 < 0$ он пересекает ось x в точках $A_1((-b - \sqrt{-\Delta})/(2a), 0)$ и $A_2((-b + \sqrt{-\Delta})/(2a), 0)$. При $\Delta = 0$ кривая касается оси x в точке $(-b/(2a), 0)$ (касание 2-го порядка); при $\Delta > 0$ точек пересечения с осью x нет. Если $a > 0$, то функция в точке $x_C = -b/(2a)$ (абсцисса вершины) имеет минимум, а при $a < 0$ – максимум (см. 3.2.1).

Функции третьей степени:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \; (a \neq 0).$$

График этой функции может иметь различный вид. У него имеется по крайней мере одна (а может быть, и две, и три) точка пересечения с осью x и ровно одна точка перегиба. У функции либо нет экстремумов, либо их два (в последнем случае один максимум и один минимум). Для более точного описания кривой нужны значение коэффициента a, значение $\Delta = 3ac - b^2$ и значение дискриминанта функции

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18\,abcd.$$

Если $a > 0$, то $y \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Если $a < 0$, то $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

При $\Delta > 0$ функция не имеет экстремумов, имеется точка перегиба E (рис. 1.9, *а*).

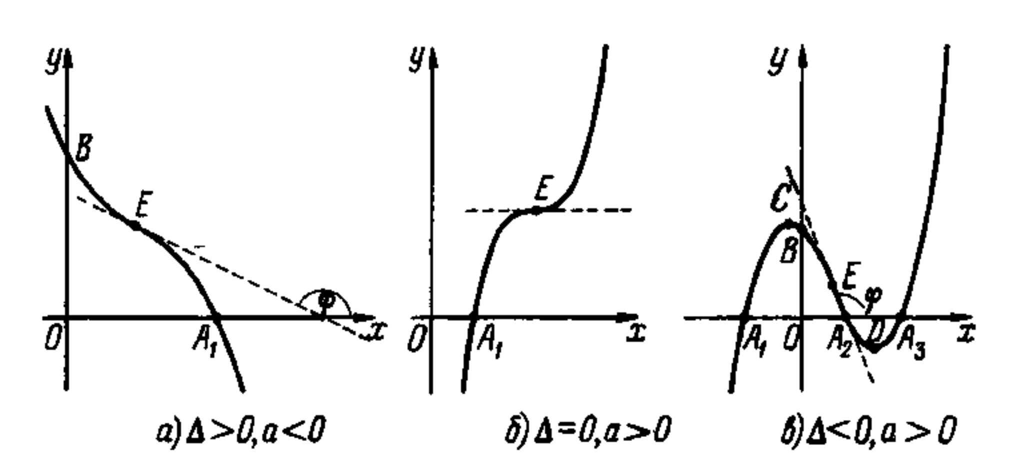


Рис. 1.9

При $\Delta = 0$ функция не имеет экстремумов, имеется точка перегиба E. Касательная в точке перегиба E параллельна оси x (рис. 1.9, *б*).

При $\Delta < 0$, $a > 0$ у функции имеется один максимум в точке $x_{max} = (-b - \sqrt{-\Delta})/(3a)$ и один минимум в точке $x_{min} = (-b + \sqrt{-\Delta})/(3a)$; имеется точка перегиба E (рис. 1.9, *в*).

При $D > 0$ кривая пересекает ось x в трех точках: A_1, A_2, A_3.

При $D = 0$ у кривой две или одна точка пересечения с осью x, причем ровно в одной точке пересечения имеет место касание. При этом точка касания в первом случае считается второго, а во втором случае – третьего порядка.

При $D < 0$ имеется одна (простая) точка пересечения с осью x.

Точка перегиба E имеет координаты $\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$ и является центром симметрии кривой. Касательная в точке E имеет наклон $\operatorname{tg} \varphi = \Delta/(3a)$. Если $\Delta = 0$, то график этой функции называется *кубической параболой* (рис. 1.9, *б*).

Целые рациональные функции n-й степени:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

$n \geqslant 0$ – целое. Графики этих функций – кривые без особых точек и без асимптот, имеющие не более n точек пересечения с осью x, не более $n-1$ экстремумов и не более $n-2$ точек перегиба,

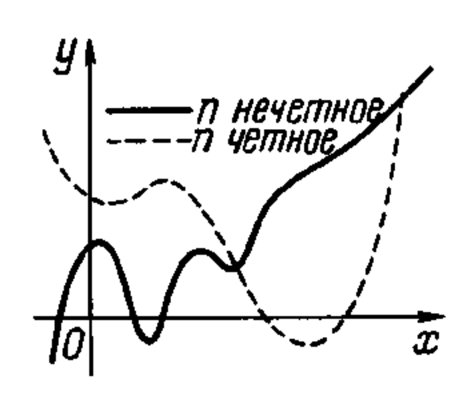


Рис. 1.10

причем в случае нескольких экстремумов максимумы и минимумы чередуются (рис. 1.10). При $n \geqslant 1$ графики – кривые n-го порядка (см. 1.3).

n – нечетное. Существует по меньшей мере одно пересечение с осью x и при $n \geqslant 3$ по меньшей мере одна точка перегиба. Число экстремумов при $n \geqslant 3$ всегда четно, а число точек перегиба нечетно. Если $a_n > 0$, то при $x \to -\infty$ имеем $y \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ имеем $y \to +\infty$. Если $a_n < 0$, то, наоборот, при $x \to -\infty$ имеем $y \to +\infty$, а при $x \to +\infty$ имеем $y \to -\infty$.

n – четное. При $n \geqslant 2$ существует по меньшей мере один экстремум функции. Число экстремумов при $n \geqslant 2$ всегда нечетно, а число точек перегиба четно. Если $a_n > 0$, то при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$ всегда $y \to +\infty$. Если $a_n < 0$, то при тех же условиях $y \to -\infty$.

Степенные функции: $y = x^n$, $n \geqslant 2$ – целое. Все графики этих функций проходят через точку (1, 1) и касаются оси x в точке (0, 0). Их иногда называют *параболами n-го порядка.* Тогда (0, 0) считается точкой n-кратного касания кривой с осью x (ср. n-кратный нуль, см. 2.3.2). Если n четно, то функция имеет в точке $x = 0$ минимум и график симметричен относительно оси y (рис. 1.11, *а*). Если n нечетно, то точка (0, 0) – точка перегиба с горизонтальной касательной и

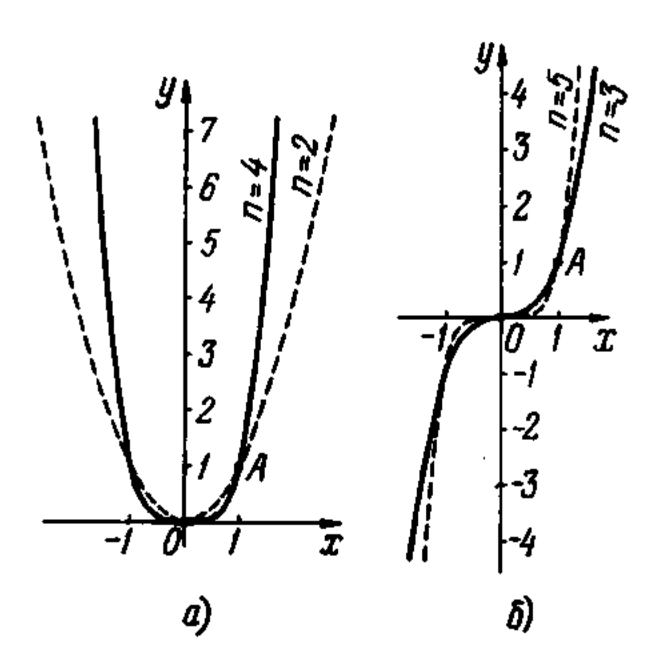


Рис. 1.11

кривая симметрична относительно начала координат (рис. 1.11, *б*). Графики функций $y = ax^n$ в случае $a > 0$ получаются растяжением ординат в a раз, а в случае $a < 0$ – растяжением в $|a|$ раз и последующим зеркальным отображением относительно оси x.

1.2.1.2. Дробно-рациональные функции.

Обратная пропорциональность: $y = a/x$, $a \neq 0$. График такой функции – *равносторонняя гипербола* с действительной полуосью $\sqrt{2|a|}$ (расстояние от вершины до центра), с центром в начале координат и с асимптотами – осями координат. Функция имеет один полюс 1-го порядка (см. 2.5.1.2.2) в точке $x = 0$. Экстремумов нет. При $a > 0$ функция в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ монотонно убывает, график лежит внутри первого и третьего квадрантов, вершины гиперболы – в точках $A(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ и $B(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$. Говорят, что *y обратно пропорционально x* (рис. 1.12). При $a < 0$ функция в тех

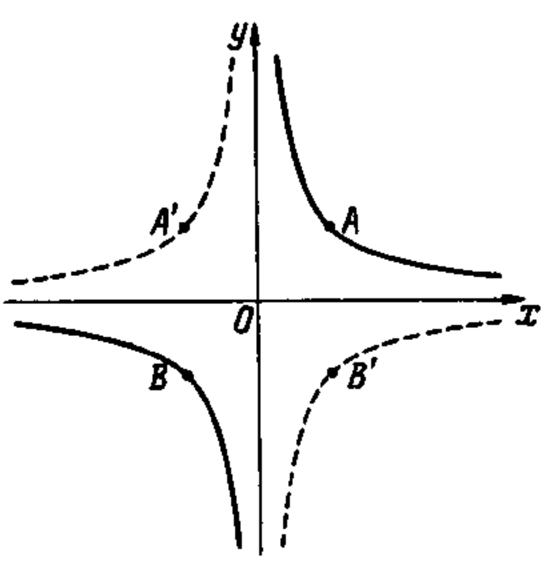


Рис. 1.12

же интервалах монотонно возрастает, график лежит внутри второго и четвертого квадрантов, вершины гиперболы – в точках $A'(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|})$ и $B'(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$ (рис. 1.12, штриховые кривые).

Дробно-линейные функции: $y = \dfrac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Графики функций – также *равносторонние гиперболы* с действительными полуосями $\sqrt{2|D|}/|a_2|$, с центрами $C(-b_2/a_2,\ a_1/a_2)$ и с асимптотами, параллельными осям координат и проходящими через C. Функции имеют один полюс 1-го порядка в точке

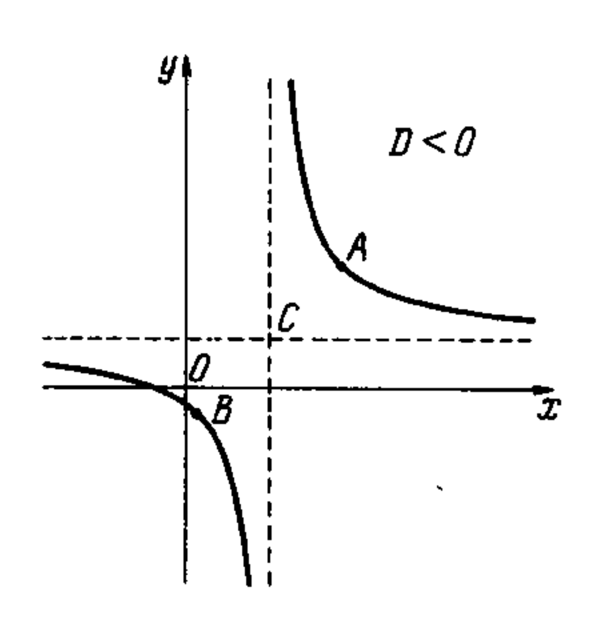


Рис. 1.13

$x_p = -b_2/a_2$. Экстремумов нет. Если $D < 0$, то функции в интервалах $(-\infty, -b_2/a_2)$ и $(-b_2/a_2, +\infty)$ монотонно убывают, вершины гипербол находятся

в точках (рис. 1.13)

$$A\left(-\frac{b_2}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right),$$

$$B\left(-\frac{b_2}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right).$$

Если $D>0$, то функции в данных интервалах монотонно возрастают, а вершины гипербол находятся в точках

$$A'\left(-\frac{b_2}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right),$$

$$B'\left(-\frac{b_2}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right).$$

Некоторые нелинейные дробно-рациональные функции.

1°. Функция $y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. График такой функции (рис. 1.14) также распадается (подобно графикам дробно-линейных

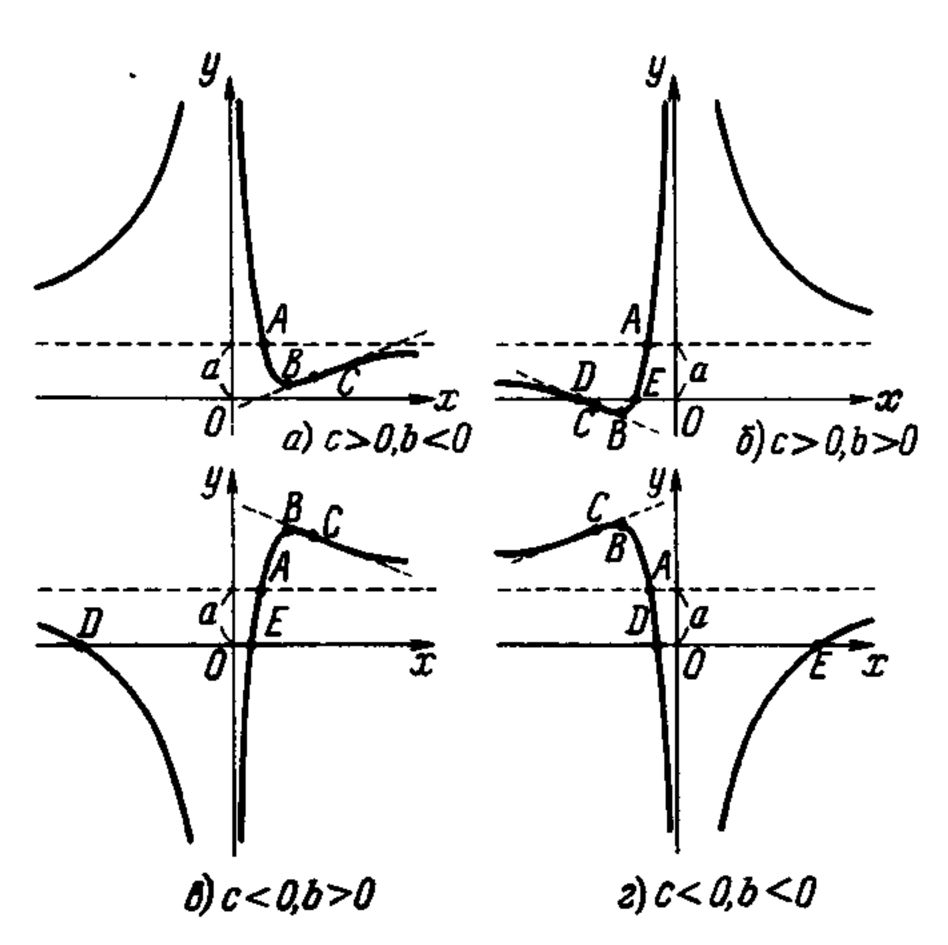


Рис. 1.14

функций) на две ветви, так как функция имеет полюс 2-го порядка в точке $x_p=0$. Ось y и прямая, уравнение которой имеет вид $x-a=0$,— асимптоты этой кривой.

Одна из двух ветвей кривой пересекает асимптоту $y-a=0$ в точке $A(-c/b,\ a)$, в то время как другая ветвь при $b<0$ монотонно возрастает, а при $b>0$ монотонно убывает. Функции имеют один экстремум в точке $x=-2c/b$ с соответствующим значением функции $y=a-b^2/(4c)$ (точка B на рис. 1.14). Точка перегиба C имеет координаты $(-3c/b,\ a-2b^2/(9c))$. При $\Delta=4ac-b^2<0$ кривая дважды пересекает ось x: в точках

$$D\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{|2a|},\ 0\right),\quad E\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{|2a|},\ 0\right).$$

При $\Delta=0$ кривая касается оси x в точке $(-b/(2a),\ 0)$. Если $\Delta>0$, то точек пересечения с осью x нет.

2°. Функция $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, $a\neq 0$. График этой функции симметричен относительно вертикальной прямой, уравнение которой имеет вид $x=-b/(2a)$, а ось x является для нее асимптотой (рис. 1.15). Вид кривой существенно определяется значением дискриминанта $\Delta=4ac-b^2$.

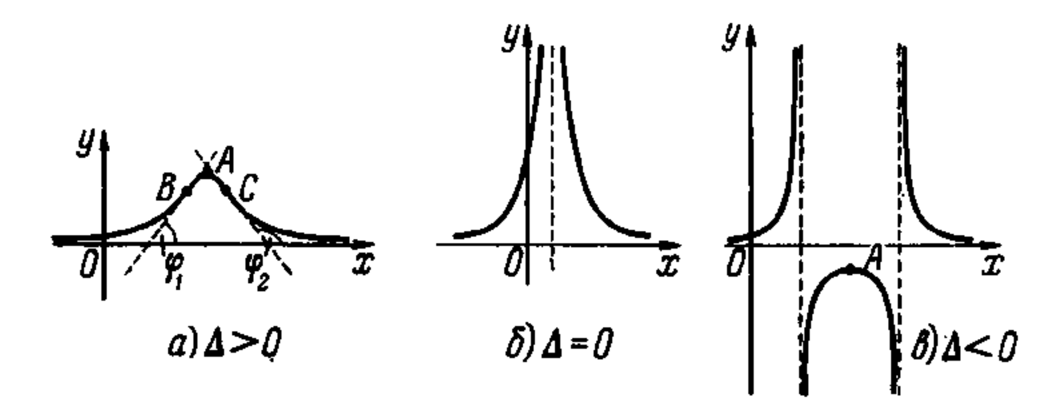


Рис. 1.15

Так как график функции $y=\dfrac{1}{-ax^2-bx-c}$ является зеркальным отображением относительно оси x графика данной функции, то достаточно ограничиться случаем $a>0$. Функция не имеет нулей.

а) $\Delta>0$. Для каждого значения x функция положительна и непрерывна; в точке $x_{max}=-b/(2a)$ она имеет максимум, равный $4a/\Delta$. В промежутке $(-\infty,\ x_{max}]$ она монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{max},\ +\infty)$ монотонно убывает. График имеет точки перегиба

$$B\left(x_{max}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}},\ \frac{3a}{\Delta}\right),\quad C\left(x_{max}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}},\ \frac{3a}{\Delta}\right)$$

с наклонами касательных в этих точках $\operatorname{tg}\varphi_1=a^2(3/\Delta)^{3/2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2=-a^2(3/\Delta)^{3/2}$ соответственно (рис. 1.15, *а*).

б) $\Delta=0$. В точке $x_p=-b/(2a)$ функция имеет полюс 2-го порядка, а для всех остальных значений x функция положительна и непрерывна. В интервале $(-\infty,\ x_p)$ она монотонно возрастает, а в интервале $(x_p,\ +\infty)$ монотонно убывает (рис. 1.15, *б*).

в) $\Delta<0$. Функция имеет в точке $x_{max}=-b/(2a)$ максимум, равный $4a/\Delta$, а в точках $x_{p_1}=x_{max}+\sqrt{-\Delta}/(2a)$ и $x_{p_2}=x_{max}-\sqrt{-\Delta}/(2a)$ – полюсы 1-го порядка. В промежутке $(-\infty,\ x_{p_2})$ она положительна и монотонно возрастает, в промежутке $(x_{p_2},\ x_{max}]$ отрицательна и монотонно возрастает, в промежутке $[x_{max},\ x_{p_1})$ отрицательна и монотонно убывает, в промежутке $(x_{p_1},\ +\infty)$ положительна и монотонно убывает. Для всякого значения x, за исключением $x=x_{p_1}$ и $x=x_{p_2}$, функция непрерывна (рис. 1.15, *в*).

3°. Функция $y=\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$, $ac\neq 0$. На тех же основаниях, что и в предыдущем примере, можно ограничиться случаем $a>0$. График этой функции пересекает ось x в начале координат и имеет асимптотой ось x (рис. 1.16). Обозначим $\Delta=4ac-b^2$.

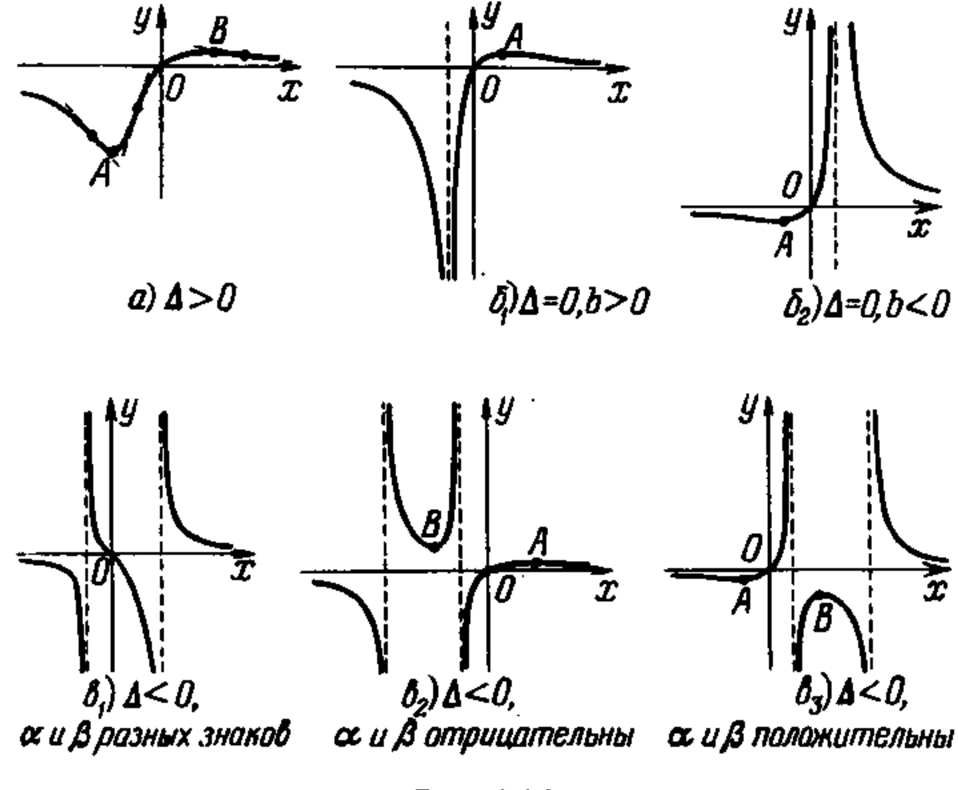


Рис. 1.16

а) $\Delta > 0$. Для каждого значения x функция непрерывна и имеет в точках $x_{\min} = \sqrt{c/a}$ и $x_{\max} = \sqrt{c/a}$ минимум и максимум со значениями $(-b - 2\sqrt{ac})/\Delta$ и $(-b + 2\sqrt{ac})/\Delta$ соответственно. В промежутке $(-\infty, x_{\min}]$ она монотонно убывает, в промежутке $[x_{\min}, x_{\max}]$ монотонно возрастает, в промежутке $[x_{\max}, +\infty)$ монотонно убывает. Существуют три точки перегиба (рис. 1.16, *а*): корни уравнения $a^2x^3 - 3axc - bc = 0$.

б) $\Delta = 0$. Из того, что $ac \neq 0$ и $a > 0$, следует, что $b \neq 0$, $c > 0$. Для каждого значения x имеем $ax^2 + bx + c = a(x + b/(2a))^2$. В точке $x_p = -b/(2a)$ функция имеет полюс 2-го порядка, а при всех остальных значениях x она непрерывна. График имеет одну точку перегиба $x = b/a$. 1) $b > 0$. В точке $x_{\max} = b/(2a)$ функция имеет максимум со значением функции $1/(2b)$. В промежутке $(-\infty, x_p)$ она монотонно убывает, в промежутке $(x_p, x_{\max}]$ монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{\max}, +\infty)$ монотонно убывает (рис. 1.16, $б_1$). 2) $b < 0$. В точке $x_{\min} = b/(2a)$ функция имеет минимум со значением $1/(2b)$. В промежутке $(-\infty, x_{\min}]$ она монотонно убывает, а в промежутке $[x_{\min}, x_p)$ монотонно возрастает, в промежутке $(x_p, +\infty)$ монотонно убывает (рис. 1.16, $б_2$).

в) $\Delta < 0$. Многочлен в знаменателе имеет два различных действительных корня в точках $\alpha = (-b - \sqrt{-\Delta})/(2a)$ и $\beta = (-b + \sqrt{-\Delta})/(2a)$, и так как $\alpha\beta = c/a \neq 0$, то $\alpha, \beta \neq 0$. Функция имеет в точках $x_{p_1} = \alpha$ и $x_{p_2} = \beta$ полюсы 1-го порядка. 1) $\alpha < 0$, $\beta > 0$. В интервалах $(-\infty, \alpha)$, (α, β), $(\beta, +\infty)$ функция монотонно убывает и не имеет экстремумов (рис. 1.16, $в_1$). 2) $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Функция имеет в точке $x_{\min} = -\sqrt{c/a}$ минимум, а в точке $x_{\max} = \sqrt{c/a}$ максимум. В промежутках $(-\infty, \alpha)$, $(\alpha, x_{\min}]$, $[x_{\max}, +\infty)$ она монотонно убывает, в промежутках $[x_{\min}, \beta)$, $(\beta, x_{\max}]$ монотонно возрастает (рис. 1.16, $в_2$). 3) $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Функция имеет в точке $x_{\min} = -\sqrt{c/a}$ минимум, а в точке $x_{\max} = \sqrt{c/a}$ максимум; в промежутках $(-\infty, x_{\min}]$, $[x_{\max}, \beta)$, $(\beta, +\infty)$ она монотонно убывает, в промежутках $[x_{\min}, \alpha)$, $(\alpha, x_{\max}]$ монотонно возрастает (рис. 1.16, $в_3$). Единственная точка перегиба — корень уравнения $a^2x^3 - 3axc - bc = 0$.

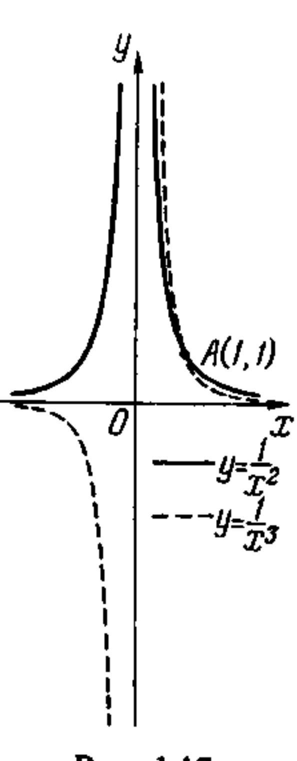


Рис. 1.17

4°. Степенные функции $y = ax^{-n}$, $a \neq 0$, n — целое положительное число. У этих функций нет экстремумов, в точке $x_p = 0$ они имеют полюс порядка n, их графики при четном n симметричны относительно оси y, а при нечетном n центрально симметричны относительно начала координат. Координатные оси — асимптоты кривых. При $a > 0$ и n четном функции в интервале $(0, +\infty)$ монотонно убывают, а в интервале $(-\infty, 0)$ монотонно возрастают; при $a > 0$ и n нечетном функции в обоих интервалах монотонно убывают. При $a < 0$ графики функций получаются вертикальным отражением относительно оси x графиков $y = |a|x^{-n}$. Если $a = 1$, то графики проходят через точку $A(1, 1)$. На рис. 1.17 показаны графики функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-3}$.

1.2.1.3. Иррациональные функции.

Квадратный корень из линейного двучлена: $y = \pm\sqrt{ax + b}$, $a \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда перед радикалом взят знак +. Если $a > 0$, то везде в области определения $-b/a \leqslant x < +\infty$ функция неотрицательна и монотонно возрастает. Если $a < 0$, то везде в области определения $-\infty < x \leqslant -b/a$ функция неотрицательна и монотонно убывает. Функция равна нулю при $x = -b/a$, ее график представляет собой часть параболы с вершиной $(-b/a, 0)$ и параметром $p = a/2$, лежащую над осью x (рис. 1.18). Если перед радикалом взят знак −, то график получается зеркальным отражением относительно оси x графика $y = +\sqrt{ax + b}$. Оси парабол совпадают с осью x. Ср. 2.6.6.1.2.

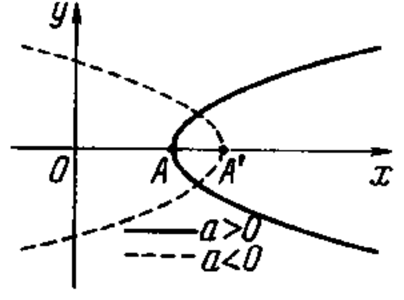


Рис. 1.18

Квадратный корень из квадратного трехчлена: $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$.

1) $a < 0$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$. В этом случае выражение не определяет никакой действительной функции с непустой областью определения.

2) $a < 0$, $\Delta < 0$. Область определения — отрезок $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = (-b + \sqrt{-\Delta})/(2a)$ и $\beta = (-b - \sqrt{-\Delta})/(2a)$. Функция имеет в точке $b/(2a)$ максимум, равный $\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак +), и

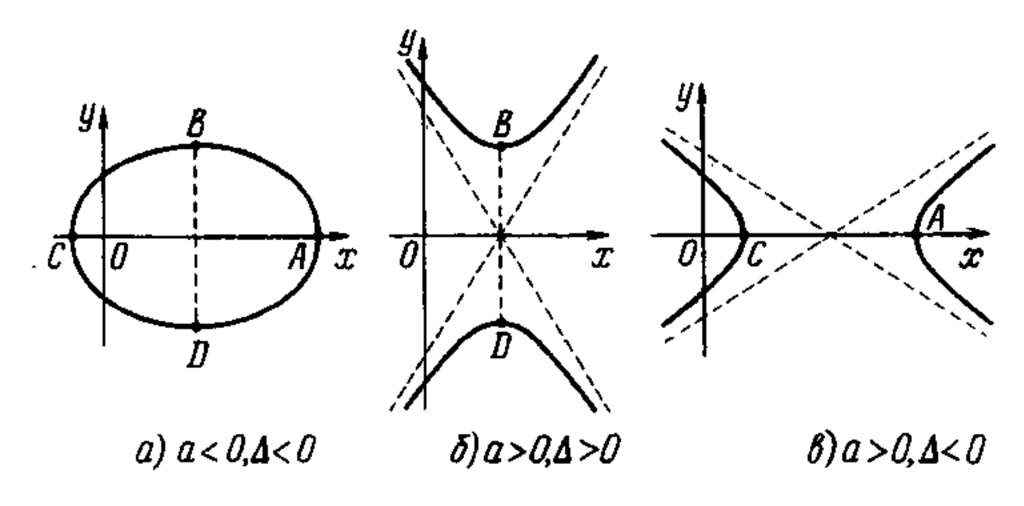


Рис. 1.19

минимум, равный $-\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак $-$); на концах области определения она равна нулю. График функции представляет собой часть эллипса с центром $(-b/(2a), 0)$ и вершинами в точках A, B, C, D, лежащую в верхней полуплоскости (рис. 1.19, *а*) (перед корнем знак $+$) и в нижней полуплоскости (рис. 1.19, *б*) (перед корнем знак $-$).

3) $a > 0$, $\Delta > 0$. Функция определена при любом значении x, не имеет нулей, но при $x = -b/(2a)$ имеет минимум, равный $\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак $+$), и максимум, равный $-\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак $-$). График состоит из ветвей гиперболы с центром $(-b/(2a), 0)$ и осью x в качестве мнимой оси (рис. 1.19, *б*); при этом верхняя ветвь соответствует знаку $+$ перед корнем, а нижняя – знаку $-$.

4) $a > 0$, $\Delta < 0$. Область определения этой функции распадается на промежутки $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$, где $\alpha = (-b - \sqrt{-\Delta})/(2a)$, $\beta = (-b + \sqrt{-\Delta})/(2a)$. Функция обладает двумя нулями в граничных точках области определения.

График состоит из двух ветвей гиперболы с центром $(-b/(2a), 0)$ и осью x в качестве действительной оси (рис. 1.19, *в*); при этом части гипербол, лежащие в верхней полуплоскости, соответствуют знаку $+$ перед корнем, а лежащие в нижней полуплоскости – знаку $-$.

Степенная функция: $y = x^k$, $k = m/n$, m, n – взаимно простые целые числа, $n \neq \pm 1$.

1) $k > 0$. Функция имеет один нуль при $x_0 = 0$, и график проходит через точку $(1, 1)$. Если n четное, то область определения – промежуток $[0, +\infty)$. Если n нечетное, то она определена

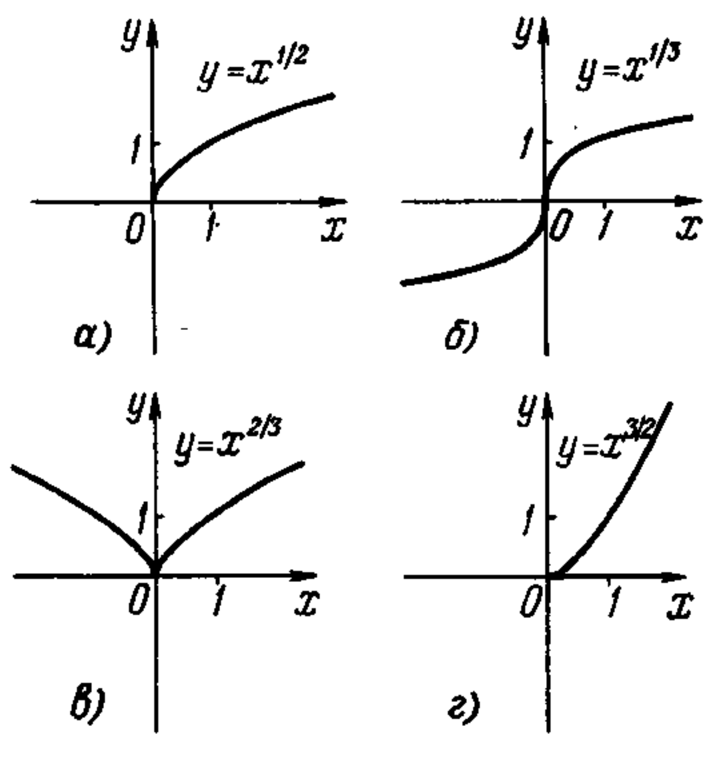


Рис. 1.20

при любом значении x. Если n нечетное, а m четное, то ось y – ось симметрии графика; если n и m нечетные, то график центрально симметричен относительно начала координат. Если $n > m$, то ось y – касательная к кривой в точке $(0, 0)$; если $m > n$, то касательная в точке $(0, 0)$ – ось x (рис. 1.20).

2) $k < 0$. При $x_p = 0$ функция имеет полюс k-го порядка – точку разрыва (точка разветвления с неограниченно возрастающим модулем значения функции). При n четном она определена в интервале $(0, +\infty)$, а при n нечетном – для любого

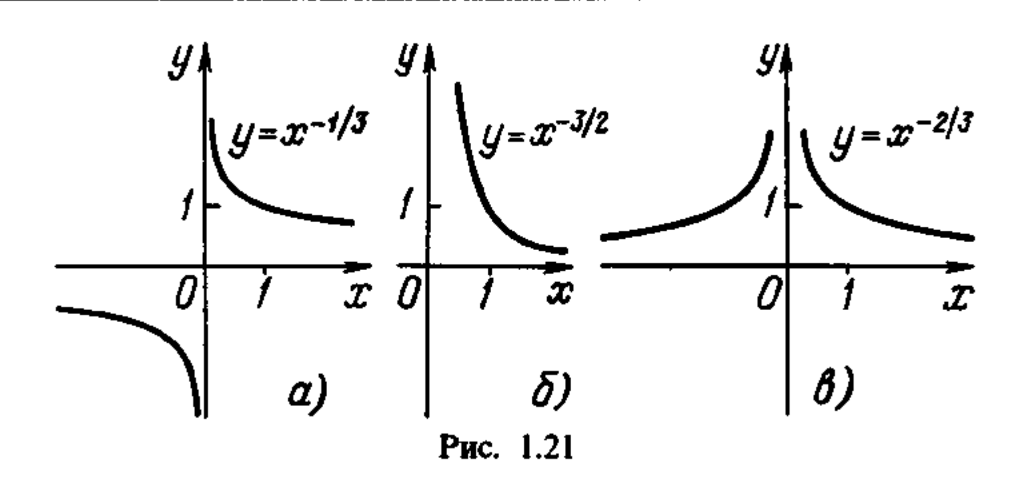


Рис. 1.21

значения $x \neq 0$. Экстремумов нет. Графики этих функций проходят через точку $(1, 1)$ и имеют асимптотами оси координат. Они обладают теми же свойствами симметрии, что и кривые, описанные в 1) (рис. 1.21).

1.2.2. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

1.2.2.1. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Общая синусоидальная зависимость: $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$, $A > 0$, $\omega > 0$.

1) При $A = 1$, $\omega = 1$ и $\varphi_0 = 0$ имеем обыкновенный синус: $y = \sin x$. Это периодическая функция с периодом $T = 2\pi$ (см. 2.5.2.1). Ее график – *синусоида* (рис. 1.22, *а*) пересекающая ось x в точках B_n с координатами $(n\pi, 0)$ (n – любое целое число), которые одновременно являются точками перегиба кривой. Касательные в этих точках образуют с положительным направлением оси x угол либо $\pi/4$, либо $-\pi/4$. Максимумы функции лежат в точках $x_{\max_n} = \pi/2 + 2n\pi$, минимумы – в точках $x_{\min_n} = -\pi/2 + 2n\pi$. Значения функции y удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

2) График общей синусоиды с амплитудой A, круговой частотой ω и фазой φ_0 представлен на рис. 1.22, *б* (незатухающее гармоническое колебание; о затухающем гармоническом колебании

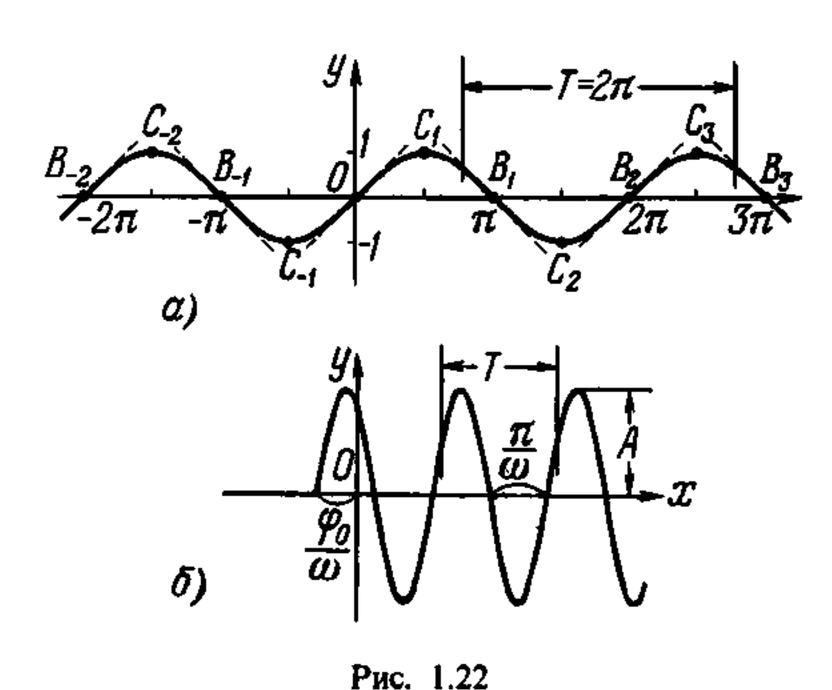


Рис. 1.22

см. 1.2.2.2). Его получают из синусоиды аффинным преобразованием: растяжением в A раз в направлении оси y, растяжением в $1/\omega$ раз в направлении оси x и последующим параллельным переносом по оси x на $-\varphi_0/\omega$. Функция имеет период $T = 2\pi/\omega$ и нули в точках $(n\pi - \varphi_0)/\omega$. Максимумы расположены в точках $(\pi/2 - \varphi_0 + 2n\pi)/\omega$, минимумы – в точках $(-\pi/2 - \varphi_0 + 2n\pi)/\omega$. Все значения функции удовлетворяют неравенству $-A \leqslant y \leqslant A$.

Косинус: $y = \cos x$. Так как $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ для любого x, то функция $\cos x$ представ-

ляет собой частный случай общей синусоидальной зависимости: $A = \omega = 1$, $\varphi_0 = \pi/2$. Поэтому ее график – сдвинутая по оси x на $-\pi/2$ синусоида (рис. 1.23). Нули – в точках $\pi/2 + n\pi$,

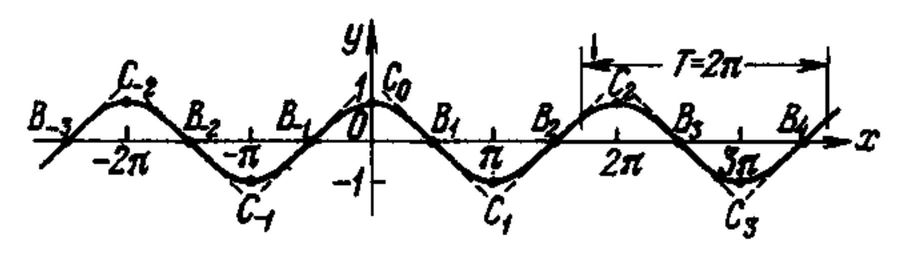


Рис. 1.23

максимумы – в точках $2n\pi$, минимумы – в точках $(2n+1)\pi$. Период $T = 2\pi$.

Тангенс: $y = \operatorname{tg} x$. Область определения этой функции представляет собой бесконечное число открытых интервалов $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$, где n – любое целое число. В каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает и имеет нуль в точке $x_{0n} = n\pi$. Функция периодична с периодом $T = \pi$. В точках $(\pi/2) + n\pi$ функция имеет полюс

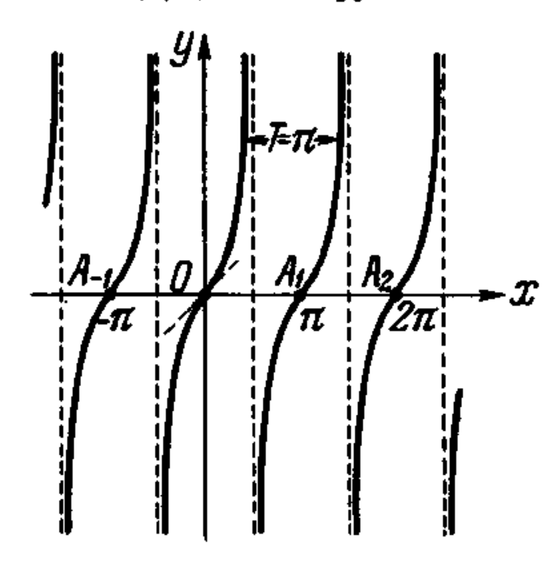


Рис. 1.24

1-го порядка. Точки пересечения ее графика с осью x – это одновременно и точки перегиба. Касательные в этих точках составляют с положительным направлением оси x угол $\pi/4$ (рис. 1.24).

Котангенс: $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения этой функции представляет собой бесконечное число открытых интервалов $(n\pi, (n+1)\pi)$, где n – любое целое число. В каждом из этих интервалов функция монотонно убывает и имеет один нуль в точках $x_{0n} = (\pi/2) + n\pi$. Функция периодическая с периодом $T = \pi$. В точках $n\pi$ она имеет полюс 1-го порядка. Точки пересечения

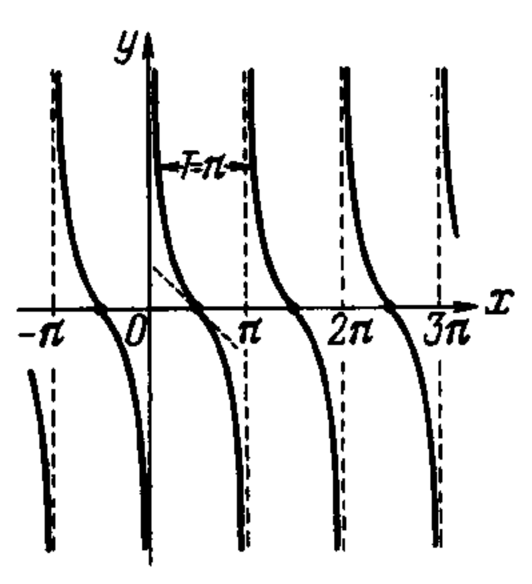


Рис. 1.25

ее графика с осью x – это одновременно и точки перегиба. Угол, образуемый в этих точках касательными к кривой с положительным направлением оси x, равен $-\pi/4$ (рис. 1.25). В области определения справедливо равенство $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}((\pi/2) + x)$.

Секанс: $y = \sec x$. Эта функция определена в открытых интервалах $(-(\pi/2) + n\pi, (\pi/2) + n\pi)$ соотношением $\sec x = 1/\cos x$ и имеет в точках $x_{p_n} = (\pi/2) + n\pi$ полюсы 1-го порядка. Функция периодична с периодом $T = 2\pi$ (рис. 1.26). При любом x из области определения справедливо

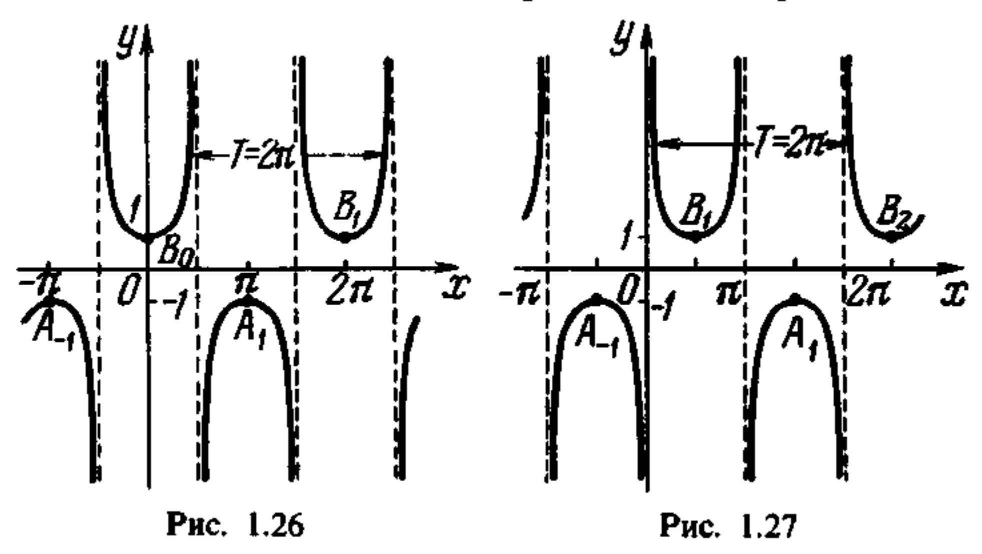


Рис. 1.26 Рис. 1.27

неравенство $|\sec x| \geqslant 1$, минимумы функции находятся в точках $2n\pi$, максимумы – в точках $(2n+1)\pi$.

Косеканс: $y = \operatorname{cosec} x$. Функция определяется в открытых интервалах $(n\pi, (n+1)\pi)$ равенством $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$; она периодична с периодом $T = 2\pi$ и имеет в точках $x_{p_n} = n\pi$ полюсы 1-го порядка (рис. 1.27). Так как при любом x из области определения справедливо равенство $\operatorname{cosec} x = \sec(x - \pi/2)$, то график совпадает со сдвинутым на $\pi/2$ по оси x графиком функции $y = \sec x$. Функция имеет минимумы в точках $\pi(4n+1)/2$ и максимумы в точках $\pi(4n+3)/2$.

Арксинус: $y = \arcsin x$. Эта функция является обратной к функции $y = \sin x$ на отрезке $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (рис. 1.28). Таким образом, ее область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а область значений $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Функция монотонно возрастает и имеет нуль при $x_0 = 0$. Ее график – часть синусоиды, зеркально отраженной относительно прямой $x - y = 0$ (биссектрисы первого и третьего квадрантов). График имеет в начале координат точку перегиба; касательная в этой точке составляет с осью x угол $\varphi = \pi/4$ (см. также примечание в конце 1.2.2.1).

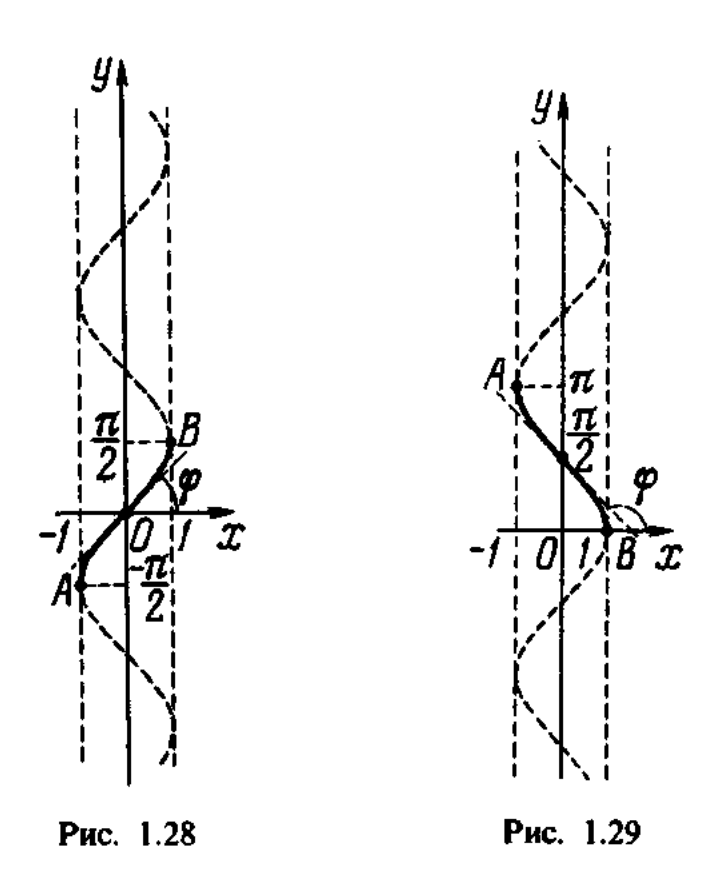


Рис. 1.28 Рис. 1.29

Арккосинус: $y = \arccos x$. Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Таким образом, ее область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а область значений $0 \leqslant y \leqslant \pi$ (рис. 1.29). Функция монотонно убывает. Ее график — часть косинусоиды, зеркально отраженной относительно прямой $x - y = 0$. График имеет в точке $(0, \pi/2)$ точку перегиба; касательная в этой точке составляет с осью x угол $\varphi = 3\pi/4$ (см. также примечание в конце 1.2.2.1).

Арктангенс: $y = \operatorname{arctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $-\pi/2 < x < \pi/2$. Следовательно, ее область определения $-\infty < x < +\infty$, а область значений $-\pi/2 < y < \pi/2$ (рис. 1.30). Функция монотонно

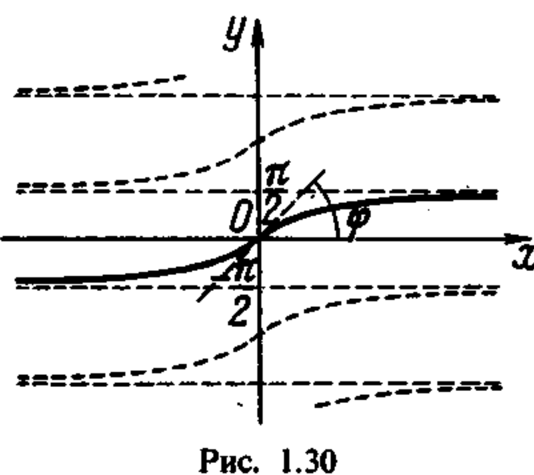


Рис. 1.30

возрастает и имеет нуль при $x_0 = 0$. Ее график получают зеркальным отражением соответствующей ветви графика функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно прямой $x - y = 0$. В начале координат функция имеет точку перегиба; угол, образуемый касательной в этой точке с осью x, равен $\varphi = \pi/4$. Прямые $y + \pi/2 = 0$ и $y - \pi/2 = 0$ — асимптоты при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ соответственно (см. также примечание в конце 1.2.2.1).

Арккотангенс: $y = \operatorname{arcctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $0 < x < \pi$. Следовательно, ее область определения $-\infty < x < +\infty$, а область значений $0 < y < \pi$ (рис. 1.31). Функция монотонно убывает

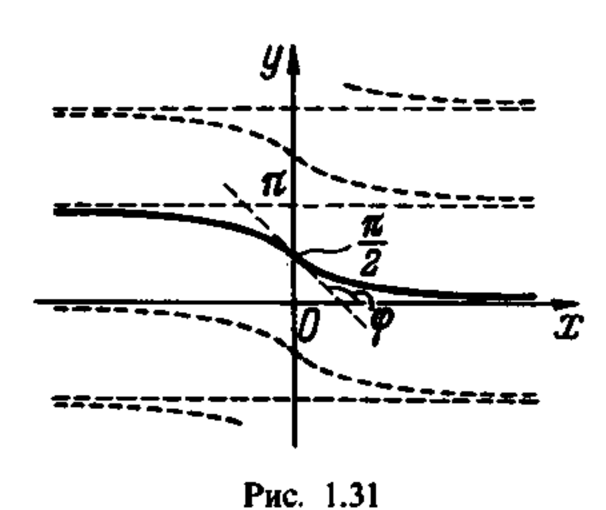


Рис. 1.31

и не имеет нулей. Ее график получают зеркальным отражением соответствующей ветви графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно прямой $x - y = 0$. Этот график имеет точку перегиба $(0, \pi/2)$; угол, образуемый касательной в этой точке и осью x, равен $\varphi = 3\pi/4$. Прямые $y = 0$ и $y - \pi = 0$ — асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно (см. также нижеследующее примечание).

Примечание. Если x — фиксированное действительное число, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то множество всех действительных чисел y, для которых $x = \sin y$, обозначают $\operatorname{Arcsin} x$; следовательно, $\operatorname{Arcsin} x = \{y \mid x = \sin y\}$. В каждом таком множестве $\operatorname{Arcsin} x$ существует единственное действительное $y_0 = \arcsin x$, которое называется *главным значением* $\operatorname{Arcsin} x$. Отсюда следует: $y \in \operatorname{Arcsin} x$ тогда и только тогда, когда имеется целое число n, при котором $y = (-1)^n \arcsin x + n\pi$. Соответственно получают: $y \in \operatorname{Arccos} x$ тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — множество целых чисел), что $y = \pm\arccos x + 2n\pi$.

Далее, $y \in \operatorname{Arctg} x$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbf{Z}$, что $y = \operatorname{arctg} x + n\pi$; $y \in \operatorname{Arcctg} x$ тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbf{Z}$, что $y = \operatorname{arcctg} x + n\pi$.

Графики многозначных функций $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$ изображены соответственно на рис. 1.28—1.31 штриховыми линиями.

1.2.2.2. Показательные и логарифмические функции.

Показательные функции: $y = e^{bx} = \exp\{bx\}$, $b \neq 0$ (их называют также *экспоненциальными*). Функция (рис. 1.32) определена при

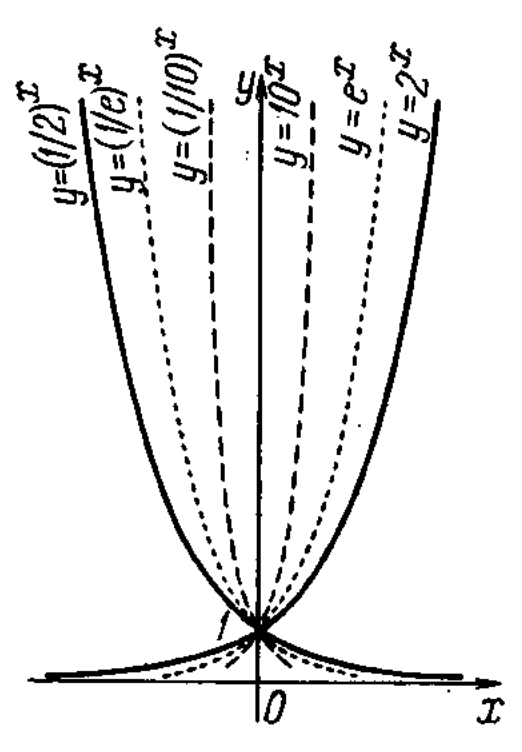


Рис. 1.32

всех значениях x, не имеет ни нулей, ни экстремумов. Ее значения всегда положительны. Обозначив $a = e^b$, имеем $e^{bx} = a^x$ для всех значений x, $a > 0$, $a \neq 1$. При $b > 0$ (т. е. $a > 1$) функция монотонно возрастает, при $b < 0$ (т. е. $0 < a < 1$) она монотонно убывает. Важные частные случаи:

$$y = e^x = \exp x,$$

$$y = e^{-x} = \exp(-x).$$

График проходит через точку $(0, 1)$ и имеет ось x в качестве асимптоты при $x \to -\infty$.

Логарифмические функции: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Они являются обратными функциями

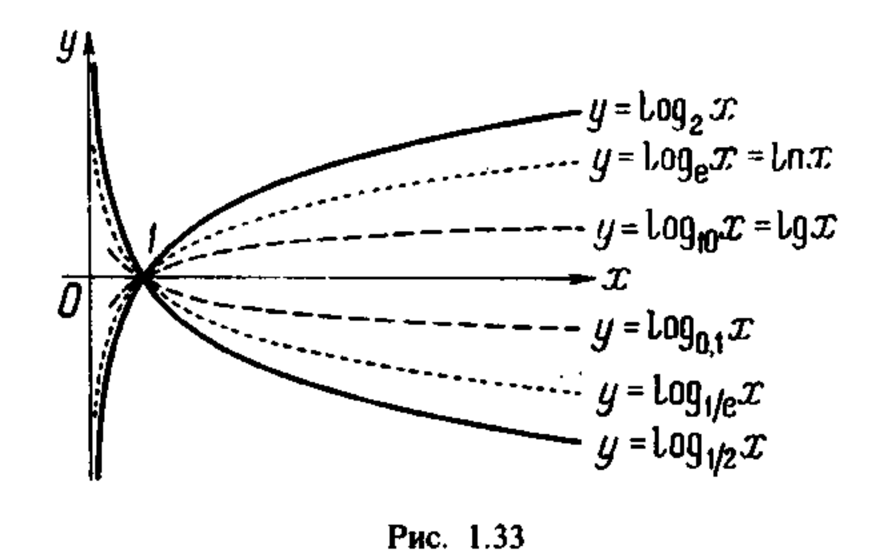


Рис. 1.33

для показательных функций. Область значений: $-\infty < y < +\infty$. Обозначая $b = \ln a$, имеем в области

определения $\log_a x = (1/b)\ln x$, $b \neq 0$. При $a > 1$ (т. е. $b > 0$) функция монотонно возрастает, при $0 < a < 1$ (т. е. $b < 0$) она монотонно убывает (рис. 1.33). Важный частный случай: $a = e$ (т. е. $b = 1$), $y = \ln x$. График проходит через точку (1, 0) и имеет асимптотой ось y. При каждом отличном от нуля значении b функции $y = e^{bx}$ и $y = (1/b)\ln x$ взаимно обратны; их графики совмещаются друг с другом при зеркальном отражении относительно прямой $x - y = 0$.

Функции $y = be^{-(ax)^2} = b\exp\{-(ax)^2\}$, $a \neq 0$, $b > 0$. Функция (рис. 1.34) определена при всех значениях x, ее область значений: $0 < y \leqslant b$.

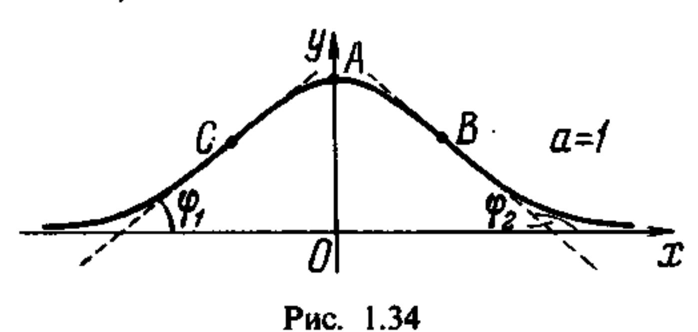


Рис. 1.34

В промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ она монотонно возрастает, а в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ монотонно убывает и имеет при $x = 0$ максимум $y_{\max} = b$. График симметричен относительно оси y и имеет две точки перегиба: $B(1/(a\sqrt{2}),\ b\sqrt{e})$ и $C(-1/(a\sqrt{2}),\ b\sqrt{e})$. Касательные в этих точках имеют угловые коэффициенты $\operatorname{tg}\varphi_1 = -ab\sqrt{2/e}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = ab\sqrt{2/e}$. Важный частный случай: $b = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, $a = \sigma\sqrt{2}$ (это *гауссова кривая — кривая нормального закона распределения ошибок*, ср. 1.1.2.6.1).

Функции $y = ae^{bx} + ce^{dx}$, $abcd \neq 0$. Функции (рис. 1.35) определены при всех значениях x.

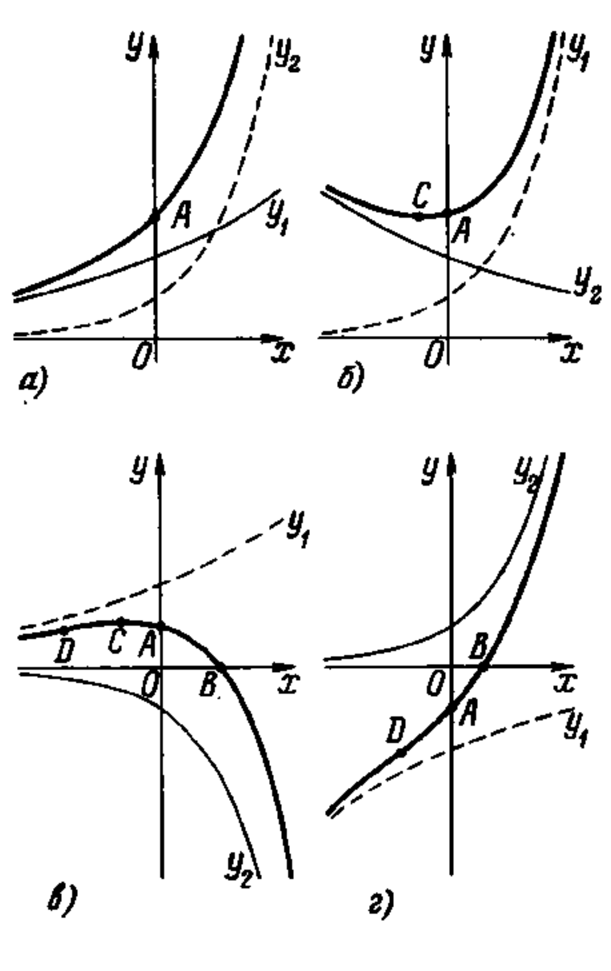


Рис. 1.35

Их рассматривают как сумму функций $y_1 = ae^{bx}$ и $y_2 = ce^{dx}$ (о частных случаях $b = 1$, $d = -1$ и $a = c = 1/2$ или $a = -c = 1/2$ см. 1.2.2.3). Можно выделить четыре типа, для каждого из которых существует четыре случая. Для каждого типа рассматривается один случай. Графики функций в остальных случаях получают из графика рассмотренного случая путем зеркального отображения относительно оси x, оси y или обеих осей.

а) $ac > 0$, $bd > 0$. На рис. 1.35, *а* изображен случай $a > 0$, $c > 0$ и $b > 0$, $d > 0$. Функция монотонно возрастает. Экстремумов и нулей нет. График не имеет точек перегиба, ось x — асимптота.

б) $ac > 0$, $bd < 0$. На рис. 1.35, *б* изображен случай $a > 0$, $c > 0$, $b > 0$, $d < 0$. Функция имеет минимум в точке $x_{\min}$, не имеет нулей. В промежутке $(-\infty, x_{\min}]$ она монотонно убывает, а в промежутке $[x_{\min}, +\infty)$ монотонно возрастает. График не имеет точек перегиба и асимптот.

в) $ac < 0$, $bd > 0$. На рис. 1.35, *в* изображен случай $a > 0$, $c < 0$, $b > 0$, $d > 0$. Функция имеет один максимум в точке $x_{\max}$, нуль при $x_0 = \dfrac{\ln(-c/a)}{b - d}$. В промежутке $(-\infty, x_{\max}]$ она монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{\max}, +\infty)$ монотонно убывает. График имеет одну точку перегиба, ось x — асимптота.

г) $ac < 0$, $bd < 0$. На рис. 1.35, *г* изображен случай $a < 0$, $c > 0$ и $b < 0$, $d > 0$. Функция не имеет экстремумов, монотонно возрастает и имеет один нуль в x_0. У графика одна точка перегиба. Асимптот нет.

Экстремальные значения (типы б) и в)) в точке C достигаются при $x = (1/(d - b))\cdot\ln(-ab/(cd))$, $d \neq b$. Нули (типы в) и г)): $x_0 = (1/(d - b))\cdot\ln(-a/c)$, $d \neq b$. Точка пересечения с осью y: $A(0,\ a + c)$; абсцисса точки перегиба D (типы в) и г)): $x = (1/(d - b))\cdot\ln(-ab^2/(cd^2))$, $d \neq b$.

Функции $y = ae^{bx + cx^2} = a\exp\{bx + cx^2\}$, $ac \neq 0$. Графики этих функций симметричны относительно прямой $2cx + b = 0$. У функций нет нулей, но есть один экстремум в точке $A(-b/(2c),\ a\exp\{-b^2/(4c)\})$.

Различают два типа графиков функций, которые изображены для случая $a > 0$ на рис. 1.36

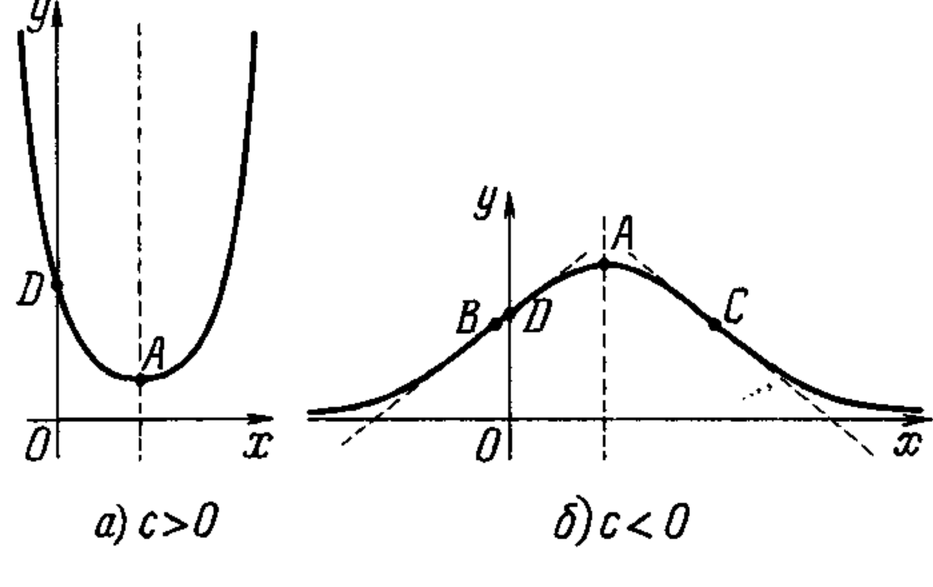


Рис. 1.36

(при $a < 0$ нужно зеркально отобразить кривые относительно оси x).

а) $c > 0$, $a > 0$. Экстремум — минимум; функция в промежутке $(-\infty, x_{\min}]$ монотонно убывает, а в промежутке $[x_{\min}, +\infty)$ монотонно возрастает. Точек перегиба и асимптот нет (рис. 1.36, *а*).

б) $c < 0$, $a > 0$. Экстремум — максимум; функция в промежутке $(-\infty, x_{\max}]$ монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{\max}, +\infty)$ монотонно убывает. Ось x — асимптота (рис. 1.36, *б*). Точки

перегиба имеют координаты

$$B\left(\frac{-b+\sqrt{-2c}}{2c},\ a\exp\left\{-\frac{(b^2+2c)}{4c}\right\}\right),$$

$$C\left(\frac{-b-\sqrt{2c}}{2c},\ a\exp\left\{-\frac{(b^2+2c)}{4c}\right\}\right).$$

Функции $y = ax^b e^{cx} = ax^b \exp(cx)$, $abc \neq 0$. Если в качестве b взять любое отличное от нуля действительное число, то функции при $b > 0$ определены в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$, а при $b < 0$ – в промежутке $0 < x < +\infty$. Здесь снова достаточно рассмотреть случай $a > 0$ (при $a < 0$ графики получаются зеркальным отображением относительно оси x).

а) $c > 0$, $b > 1$ (рис. 1.37, *а*). График касается оси x в точке (0, 0). Функция монотонно возрастает.

б) $c > 0$, $b = 1$ (рис. 1.37, *б*). График проходит через точку (0, 0) и касается в этой точке прямой $x - y = 0$. Функция монотонно возрастает.

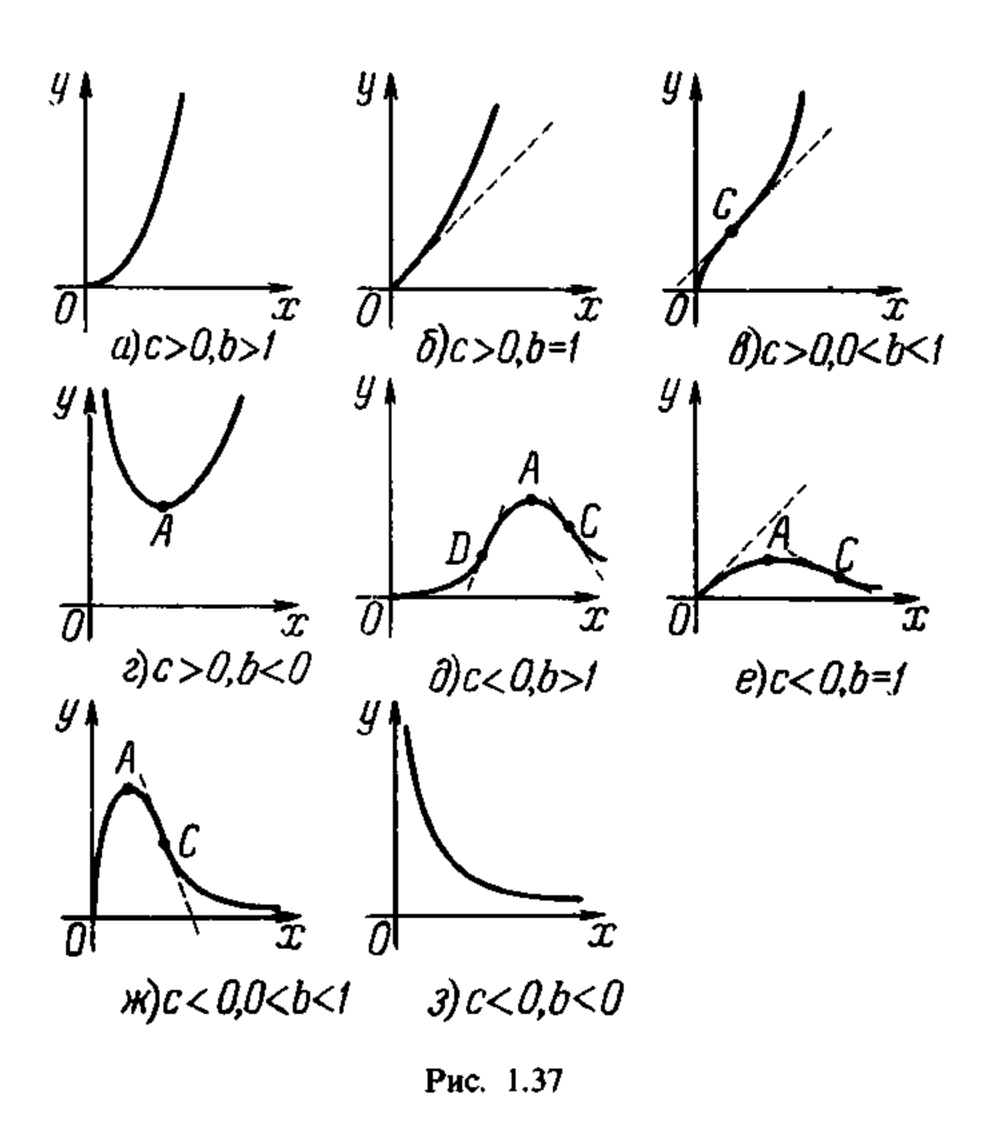


Рис. 1.37

в) $c > 0$, $0 < b < 1$ (рис. 1.37, *в*). График касается оси y в точке (0, 0) и имеет точку перегиба C с абсциссой $(\sqrt{b} - b)/c$. Функция монотонно возрастает и не имеет экстремумов.

г) $c > 0$, $b < 0$ (рис. 1.37, *г*). Ось y – асимптота. Функция имеет минимум в точке $x = -b/c$ и монотонно убывает в промежутке $(0,\ -b/c]$, а в промежутке $[-b/c,\ +\infty)$ монотонно возрастает.

д) $c < 0$, $b > 1$ (рис. 1.37, *д*). График касается оси x в точке (0, 0) и имеет две точки перегиба C и D с абсциссами $x_C = (b + \sqrt{b})/(-c)$ и $x_D = (b - \sqrt{b})/(-c)$. Ось x – асимптота. Функция имеет максимум при $x = -b/c$. В промежутке $[0,\ -b/c]$ монотонно возрастает, а в промежутке $[-b/c,\ +\infty)$ монотонно убывает.

е) $c < 0$, $b = 1$ (рис. 1.37, *е*). График проходит через точку (0, 0) и касается в этой точке прямой $ax - y = 0$. Существует только одна точка перегиба C с абсциссой $x_C = -2/c$, аналогичная рассмотренной в д), и единственный максимум при $x = -1/c$.

ж) $c < 0$, $0 < b < 1$ (рис. 1.37, *ж*). График касается оси y в точке (0, 0). Существует только одна точка перегиба C с абсциссой $x_C = (b + \sqrt{b})/(-c)$ и единственный максимум при $x = -1/c$.

з) $c < 0$, $b < 0$ (рис. 1.37, *з*). Оси координат – асимптоты. Функция монотонно убывает в интервале $(0,\ +\infty)$.

Функции $y = Ae^{-ax}\sin(\omega x + \varphi)$, $A > 0$, $a > 0$, $\omega > 0$. Графики этих функций (рис. 1.38) представляют собой при $x \geqslant 0$ затухающие гармонические колебания, если интерпретировать x как

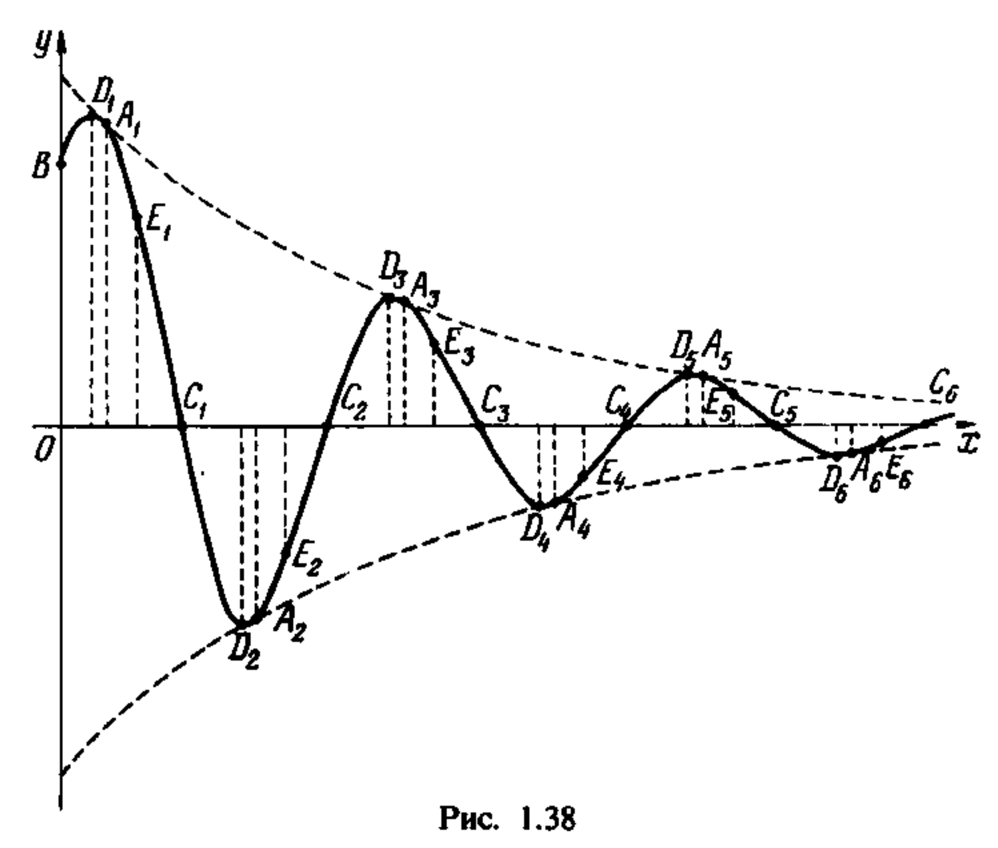


Рис. 1.38

время, а y как отклонение (при $a = 0$ – незатухающие гармонические колебания, см. 1.2.2.1). Кривая располагается в области, ограниченной графиками функций $y = Ae^{-ax}$ и $y = -Ae^{-ax}$ (изображены штриховыми линиями), имеющими ось x в качестве асимптоты.

Координаты точек касания A_k рассматриваемой кривой с графиками функций $y = Ae^{-ax}$ и $y = -Ae^{-ax}$ равны

$$x_k = \frac{(k + 0{,}5)\pi - \varphi}{\omega},\quad y_k = (-1)^k Ae^{-ax_k},$$

k – целое. Точки пересечения с осями координат: $B(0,\ A\sin\varphi)$, $C_k((k\pi - \varphi)/\omega,\ 0)$; точки экстремума (абсциссы точек D_k): $(k\pi - \varphi + \operatorname{arctg}(\omega/a))/\omega$; абсциссы точек перегиба E_k: $(k\pi - \varphi + 2\operatorname{arctg}(\omega/a))/\omega$; логарифмический декремент: $\delta = \ln|y_k/y_{k+1}| = a\pi/\omega$.

1.2.2.3. Гиперболические функции.

Гиперболический синус: $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Функция нечетная, монотонно возрастающая. Ее график (рис. 1.39) центрально симметричен относительно начала координат. Точка (0, 0) является точкой перегиба кривой. Угол наклона φ касательной в точке (0, 0) равен $\pi/4$.

Рис. 1.39

Гиперболический косинус: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Эта функция в промежутке $(-\infty, 0]$ монотонно убывает, а в промежутке $[0, +\infty)$ монотонно возрастает, имеет при $x_0 = 0$ минимум со значением функции, равным единице. Ее график (рис. 1.40) симметричен относительно оси y и является *цепной линией* (см. 1.3.4). В окрестности точки $A(0, 1)$ он хорошо аппроксимируется графиком функции $y = 1 + x^2/2$ (парабола на рис. 1.40 изображена штриховой линией, касание 3-го порядка).

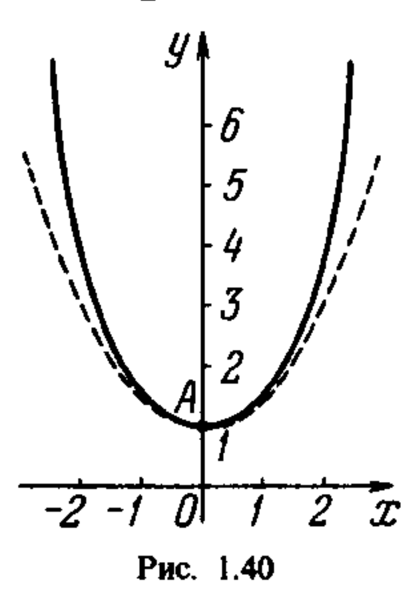


Рис. 1.40

Гиперболический тангенс: $y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Функция монотонно возрастает, все ее значения лежат между -1 и 1. График (рис. 1.41) центрально симметричен относительно начала координат. Точка $(0, 0)$ является точкой перегиба кривой. Угол наклона φ касательной в точке $(0, 0)$ равен $\pi/4$. Прямые $y - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$ – асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно.

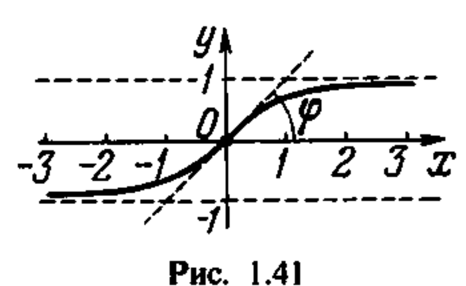


Рис. 1.41

Гиперболический котангенс: $y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция монотонно убывает; в точке $x_p = 0$ она имеет полюс первого порядка. Нулей нет. График функции (рис. 1.42) центрально симметричен относительно точки $(0, 0)$. Прямые $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$ – асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно; прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

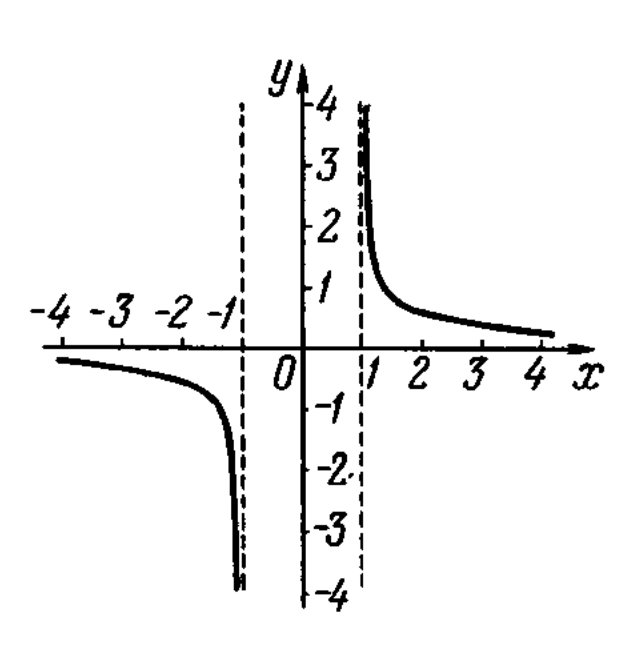


Рис. 1.42

Ареасинус: $y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Эта функция является обратной функцией для $y = \operatorname{sh} x$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ и поэтому монотонно возрастает. График (рис. 1.43) получают зеркальным отражением графика $y = \operatorname{sh} x$ относительно прямой $x - y = 0$. Точка $(0, 0)$ – центр симметрии кривой и одновременно точка перегиба. Угол наклона φ касательной в точке $(0, 0)$ равен $\pi/4$.

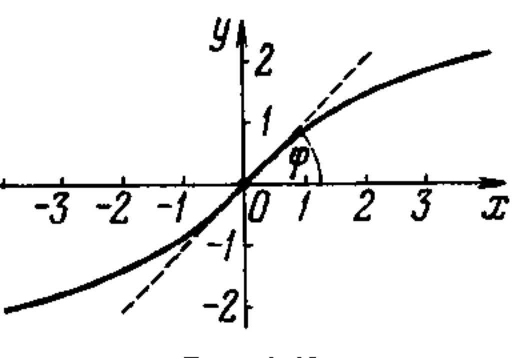


Рис. 1.43

Ареакосинус: $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. Эта функция двузначная. Она является обратной функцией для $y = \operatorname{ch} x$ в промежутке $[0, +\infty)$ и в промежутке $(-\infty, 0]$. Ее область определения $1 \leqslant x < +\infty$. В области определения верхняя ветвь монотонно возрастает, а нижняя монотонно убывает. Ее график (рис. 1.44) касается в точке $A(1, 0)$ прямой, параллельной оси y, и является графиком $y = \operatorname{ch} x$, зеркально отраженным относительно прямой $x - y = 0$.

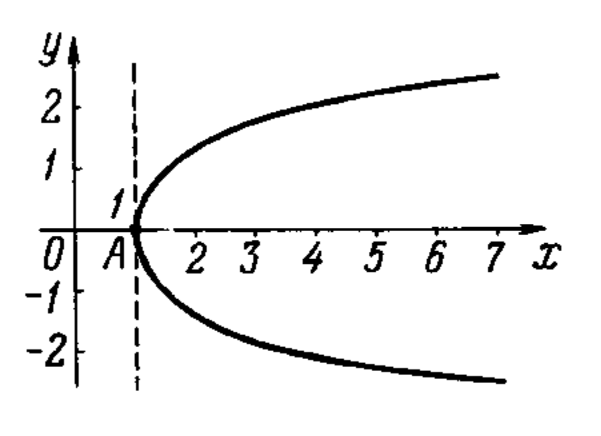


Рис. 1.44

Ареатангенс: $y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$. Эта функция является обратной функцией для $y = \operatorname{th} x$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Ее область определения $-1 < x < 1$, область значений $-\infty < y < +\infty$. Функция нечетная, монотонно возрастающая. График функции (рис. 1.45) центрально симметричен относительно точки $(0, 0)$, причем эта точка – одновременно и точка перегиба. Касательная в этой точке имеет угол наклона $\varphi = \pi/4$, прямые $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$ – асимптоты. График функции получается зеркальным отражением графика $y = \operatorname{th} x$ относительно прямой $x - y = 0$.

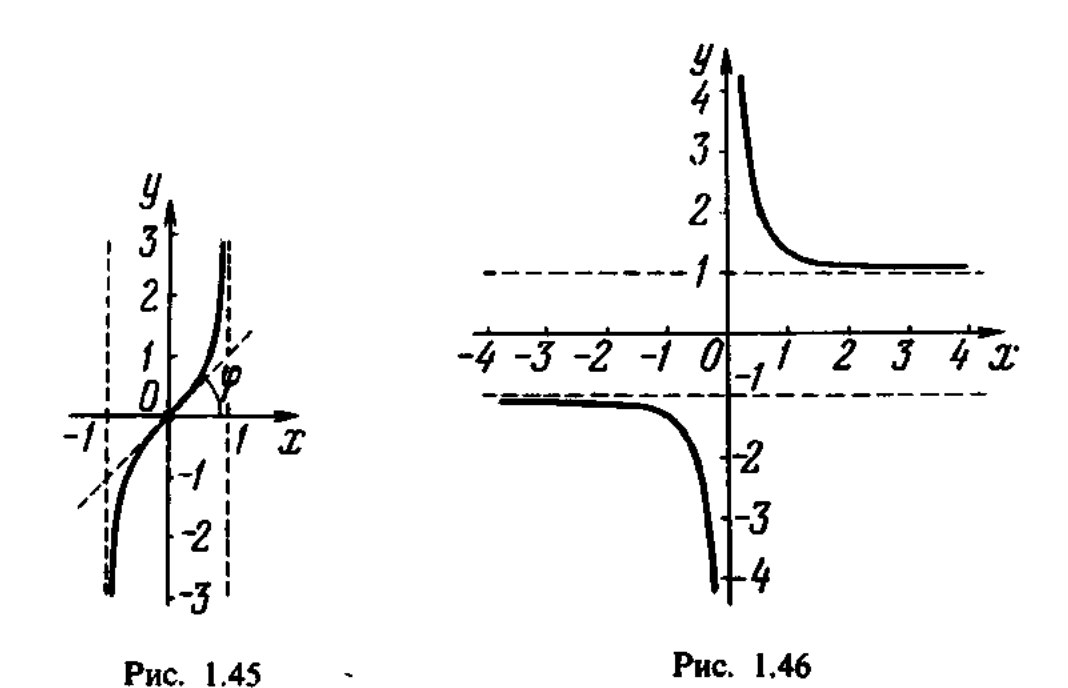


Рис. 1.45 Рис. 1.46

Ареакотангенс: $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Эта функция является обратной функцией для $y = \operatorname{cth} x$ в обоих интервалах монотонности $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Следовательно, ее область определения распадается на интервалы $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, в которых она монотонно убывает. Ее график (рис. 1.46) центрально симметричен относительно точки (0, 0); он получается путем зеркального отражения относительно прямой $x - y = 0$ графика $y = \operatorname{cth} x$ и имеет асимптоты $y = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$.

1.3. ВАЖНЕЙШИЕ КРИВЫЕ

Если $F(x, y) = 0$ – уравнение, имеющее решения и не являющееся тождеством (см. 2.4.1.2), и если $Q = \{(a, b) \mid F(a, b) = 0\}$ – множество всех упорядоченных пар действительных чисел a и b, для которых $F(a, b) = 0$, то множество $L = \{M(a, b) \mid (a, b) \in Q\}$ всех точек M плоскости, имеющих в какой-либо системе координат S координаты a и b, называют *плоской кривой, определенной в S уравнением* $F(x, y) = 0$. Если $F(x, y)$ представляет собой, в частности, выражение $y - f(x)$ и система координат декартова, то кривая L является графиком функции $y = f(x)$ (см. 1.2). Таким образом, уравнение кривой зависит не только от вида кривой, но и от системы координат.

Кривая L называется *алгебраической кривой порядка n*, если имеются декартова система координат и многочлен $F(x, y)$ переменных x, y степени n такой, что $F(x, y) = 0$ является уравнением кривой L в этой системе координат.

В полярной системе координат (см. 2.6.5), как правило, ограничиваются уравнениями вида $\rho = f(\varphi)$. Тогда $\rho = f(\varphi)$ рассматривается как уравнение кривой L в полярных координатах.

Если $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – две функции, определенные в одном и том же промежутке I, и S – декартова система координат, то обе эти функции называются *параметрическим представлением кривой*

$$L = \{M(x(t), y(t)) \mid t \in I\}.$$

1.3.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Об алгебраических кривых 1-го и 2-го порядков см. 2.6.6.1.

1.3.1.1. Кривые 3-го порядка.

Полукубическая парабола (рис. 1.47). Уравнение кривой: $a^2x^3 - y^2 = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = t^2$, $y = at^3$, $-\infty < t < +\infty$. Кривизна K кривой в точке с абсциссой x: $K = 6a/(\sqrt{x}(4 + 9a^2x)^{3/2})$. Длина l дуги кривой от начала координат до точки M с абсциссой x: $l = ((4 + 9a^2x)^{3/2} - 8)/(27a^2)$.

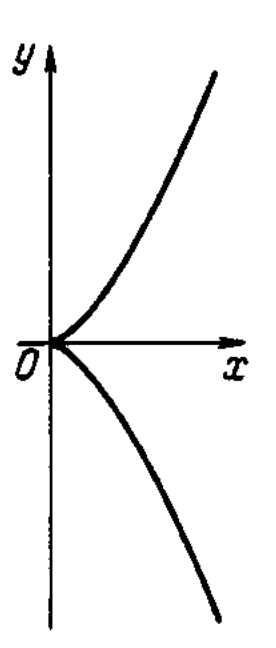


Рис. 1.47

Локон Аньези (рис. 1.48). Уравнение кривой: $(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$, $a > 0$. Асимптота: $y = 0$. Радиус кривизны в вершине $A(0, a)$: $R_A = a/2$. Точки перегиба: $B(a/\sqrt{3}, 3a/4)$, $C(-a/\sqrt{3}, 3a/4)$. Угловые коэффициенты касательных в точках перегиба: $\operatorname{tg}\varphi_2 = -3\sqrt{3}/8$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = 3\sqrt{3}/8$. Площадь между кривой и асимптотой: $S = \pi a^2$.

Декартов лист (рис. 1.49). Уравнение кривой: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = 3at/(1 + t^3)$, $y = 3at^2/(1 + t^3)$, $-\infty < t < -1$ и $-1 < t < +\infty$. Если обозначить через $M(t)$ точку кривой, соответствующую значению параметра t, а через $\varphi(t)$ угол между MO и положительным направлением оси x, то будет справедливо равенство $\operatorname{tg}\varphi(t) = t$. Начало координат O – узловая точка кривой. При $-1 < t < +\infty$ кривая проходит из второго квадранта через точку (0, 0) ($t = 0$) и A в точку (0, 0) ($t \to +\infty$); при $-\infty < t < -1$ кривая, начинаясь в точке (0, 0), располагается в четвертом квадранте. Оси координат – касательные к кривой в точке (0, 0). Радиус кривизны в точке (0, 0) обеих ветвей кривых: $R_0 = 3a/2$. Уравнение асимптоты: $x + y + a = 0$. Вершина: $A(3a/2, 3a/2)$. Площадь петли: $S_1 = 3a^2/2$; площадь между кривой и асимптотой: $S_2 = 3a^2/2$.

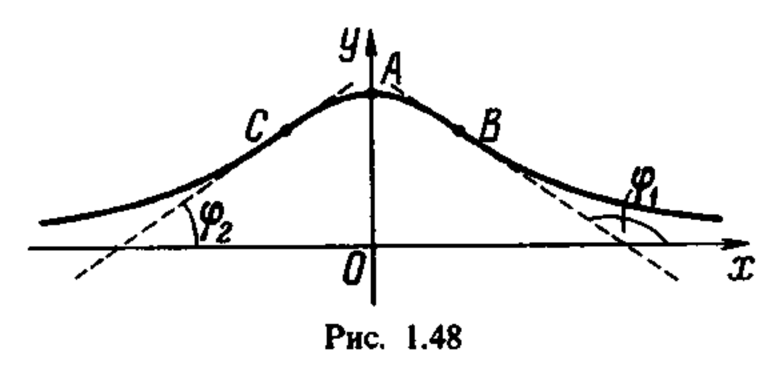


Рис. 1.48

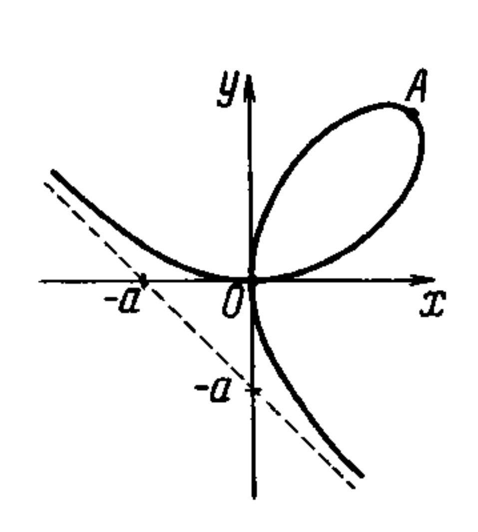


Рис. 1.49

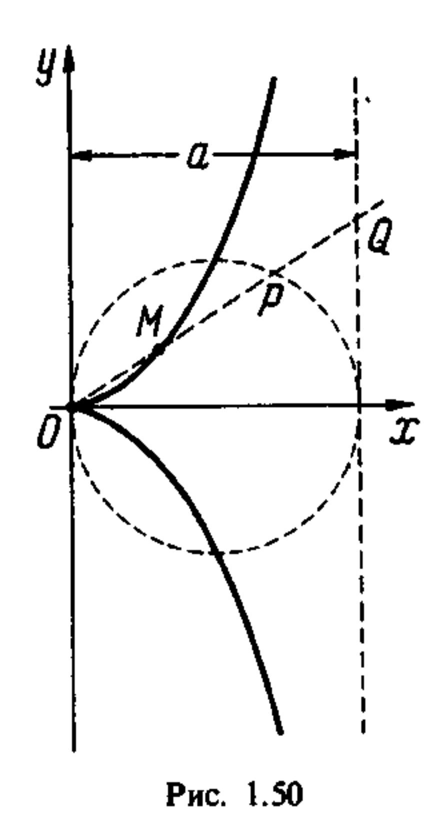


Рис. 1.50

Циссоида (рис. 1.50). Уравнение кривой: $x^3 + (x - a)y^2 = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = at^2/(1 + t^2)$, $y = at^3/(1 + t^2)$, $-\infty < t < +\infty$; $t = \operatorname{tg}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между лучом OM и положительным направлением оси x ($M(t)$ – текущая точка кривой). Уравнение в полярных координатах: $\rho_M = a\sin^2\varphi/\cos\varphi$. Геометрическое определение: точка M находится на кривой, если она лежит на луче, выходящем из начала

координат, и $|MO| = |PQ|$, где P – вторая точка пересечения луча с окружностью радиуса $a/2$ и центром $(a/2, 0)$, а Q – точка пересечения луча с прямой $x - a = 0$. Точка $(0, 0)$ – точка возврата кривой. Асимптота: $x - a = 0$; площадь между кривой и асимптотой: $S = 3\pi a^2/4$.

Строфоида (рис. 1.51). Уравнение кривой: $(x + a)a^2 + (x - a)y^2 = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = a(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $y = at(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $-\infty < t < +\infty$; $t = \operatorname{tg}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между прямой MO и положительным

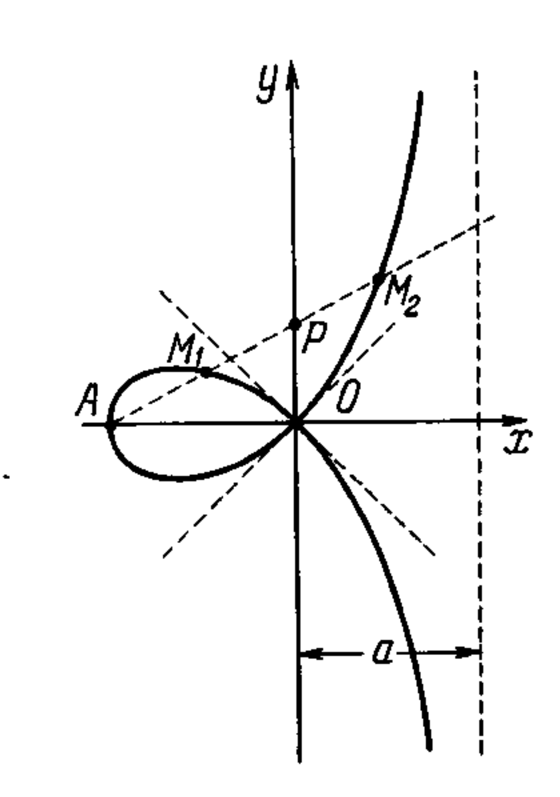


Рис. 1.51

направлением оси x ($M = M(t)$ – текущая точка кривой). Уравнение в полярных координатах: $\rho = -a\cos 2\varphi/\cos\varphi$. Геометрическое определение: точка M лежит на кривой, если она лежит на луче, выходящем из $A(-a, 0)$, и $|PM| = |PO|$, где P – точка пересечения луча с осью y, O – начало координат (на рис. 1.51 $|PM_1| = |PO| = |PM_2|$). Начало координат – узловая точка кривой, прямые $x + y = 0$ и $x - y = 0$ – касательные к кривой в O. Асимптота: $x - a = 0$. Вершина: $A(-a, 0)$. Площадь петли: $S_1 = 2a^2 - \pi a^2/2$; площадь между кривой и асимптотой: $S_2 = 2a^2 + \pi a^2/2$.

1.3.1.2. Кривые 4-го порядка.

Конхоида Никомеда (рис. 1.52). Уравнение кривой: $(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$, $a > 0$,

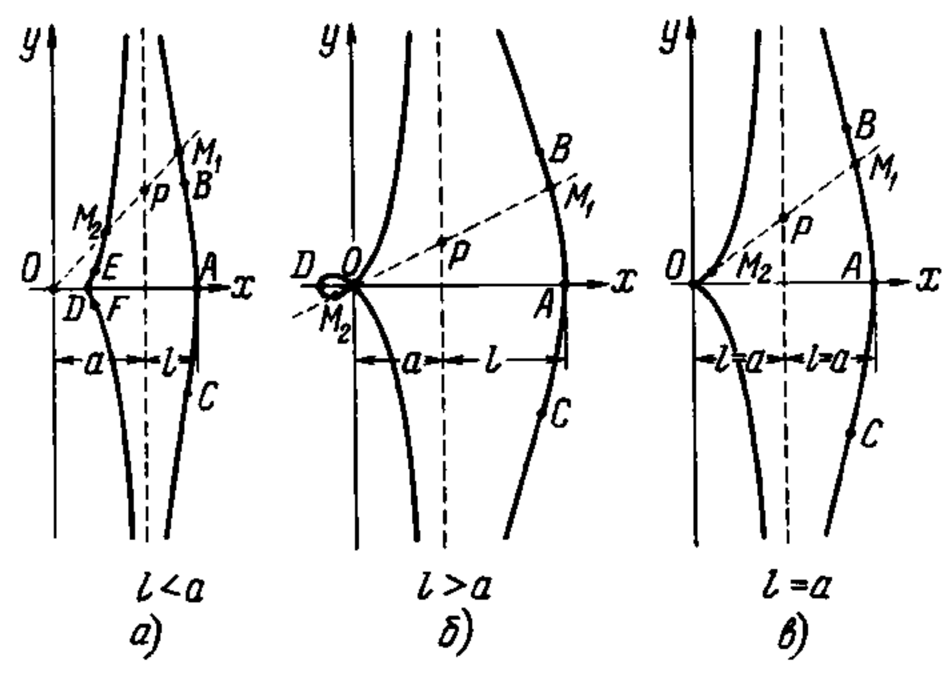


Рис. 1.52

$l > 0$. Параметрическое представление: $x = a + l\cos t$, $y = a\operatorname{tg} t + l\sin t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$ – правая ветвь, $\pi/2 < t < 3\pi/2$ – левая ветвь. Уравнения в полярных координатах: $\rho = (a/\cos\varphi) + l$ – правая ветвь, $\rho = (a/\cos\varphi) - l$ – левая ветвь. Геометрическое определение конхоиды Никомеда: конхоида*) прямой $x - a = 0$ относительно O. Асимптота: $x - a = 0$ (для обеих ветвей). Вершины: $A(a + l, 0)$ – правая ветвь, $D(a - l, 0)$ – левая. Точки перегиба правой ветви: B и C; их абсцисса – наибольший корень уравнения $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$. Для левой ветви следует различать три случая: а) $l < a$ (рис. 1.52, а). Точка O – изолированная точка кривой (O в этом случае в параметрическом представлении не содержится). Левая ветвь имеет две точки перегиба, абсцисса которых – второй по величине корень выписанного выше уравнения. б) $l > a$ (рис. 1.52, б). O – узловая точка кривой, касательные в O имеют угловые коэффициенты $\sqrt{l^2 - a^2}/a$ или $-\sqrt{l^2 - a^2}/a$, радиус кривизны в O: $R_0 = l\sqrt{l^2 - a^2}/(2a)$. в) $l = a$ (рис. 1.52, в). Точка O совпадает с вершиной D и является точкой возврата.

Улитка Паскаля (рис. 1.53). Уравнение кривой: $(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$, $a > 0$, $l > 0$.

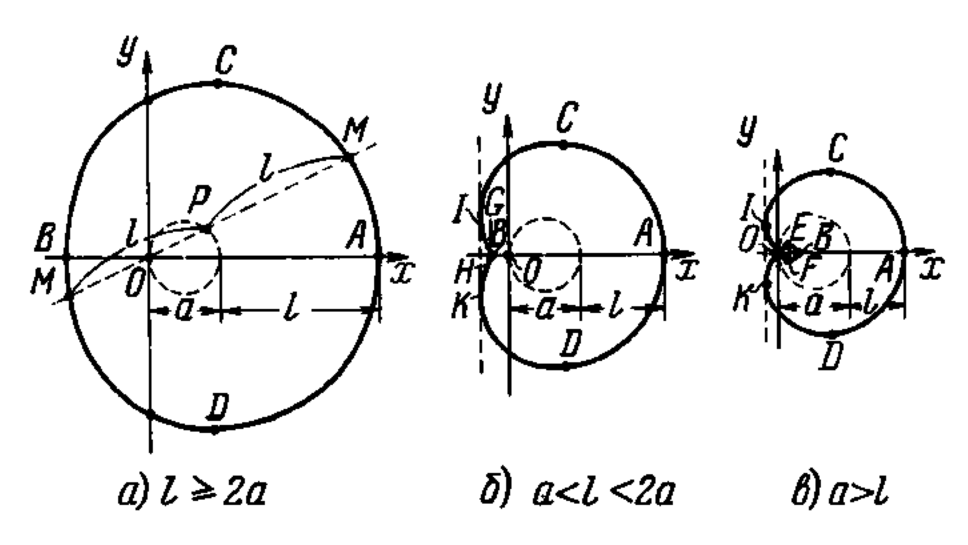


Рис. 1.53

В параметрической форме (при $a < l$ точка O не включается): $x = a\cos^2 t + l\cos t$, $y = a\cos t\sin t + l\sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$. Уравнение в полярных координатах (при $a < l$ без точки O): $\rho = a\cos\varphi + l$. Геометрическое определение (без O как изолированной точки): конхоида окружности с радиусом $a/2$ и центром $(a/2, 0)$ относительно O. Вершины $A(a + l, 0)$, $B(a - l, 0)$. Экстремумов четыре, если $a > l$, и два, если $a \leqslant l$:

$$C,\ D,\ E,\ F\left(\cos t = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{(4a)}\right).$$

Точки перегиба G, $H\left(\cos t = -\dfrac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$ существуют, если $a < l < 2a$. Если $l < 2a$, то существуют две точки: $I(-l^2/(4a), l\sqrt{4a^2 - l^2}/(4a))$ и $K(-l^2/(4a), -l\sqrt{4a^2 - l^2}/(4a))$, обладающие общей касательной. При $a < l$ точка O – изолированная точка кривой, при $a > l$ точка O – угловая точка с двумя касательными (угловой коэффициент касательных

*) *Конхоидой* данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l. Если уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $\rho = f(\varphi)$, то уравнением ее конхоиды будет $\rho = f(\varphi) \pm l$. Конхоида Никомеда – конхоида прямой линии.

$\sqrt{a^2-l^2}/l$ и $-\sqrt{a^2-l^2}/l$) и радиусом кривизны $\sqrt{a^2-l^2}/2$, при $a=l$ точка O – точка возврата (см. кардиоиду).

Кардиоида (рис. 1.54). Уравнение кривой: $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0$, $a>0$. В параметрической форме: $x=a\cos t(1+\cos t)$, $y=a\sin t(1+\cos t)$, $0\leqslant t<2\pi$. Уравнение в полярных

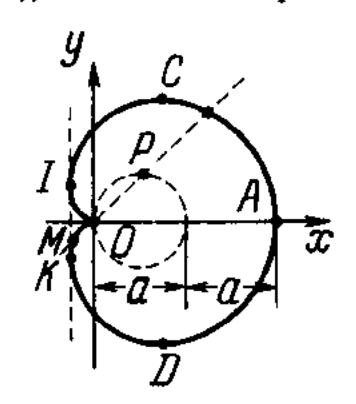


Рис. 1.54

координатах: $\rho=a(1+\cos\varphi)$. Геометрическое определение: частный случай улитки Паскаля (см. выше) или частный случай эпициклоиды (см. 1.3.2). Вершина: $A(2a,0)$; точка возврата – точка O. Координаты экстремумов C и D: $x_C=x_D=3a/4$, $y_C=-y_D=\sqrt{3}x_C$, $\varphi_C=-\varphi_D=\pi/3$, $\rho_C=\rho_D=3a/2$. Площадь: $S=3\pi a^2/2$ (шестикратная площадь круга с диаметром a). Длина кривой: $s=8a$.

Овалы Кассини (рис. 1.55). Уравнение кривой: $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)-(a^4-c^4)=0$, $c>0$, $a>0$.

В полярных координатах: $\rho^2=c^2\cos 2\varphi\pm\sqrt{c^4\cos^2 2\varphi+(a^4-c^4)}$. Геометрическое определение: точка M плоскости лежит на кривой,

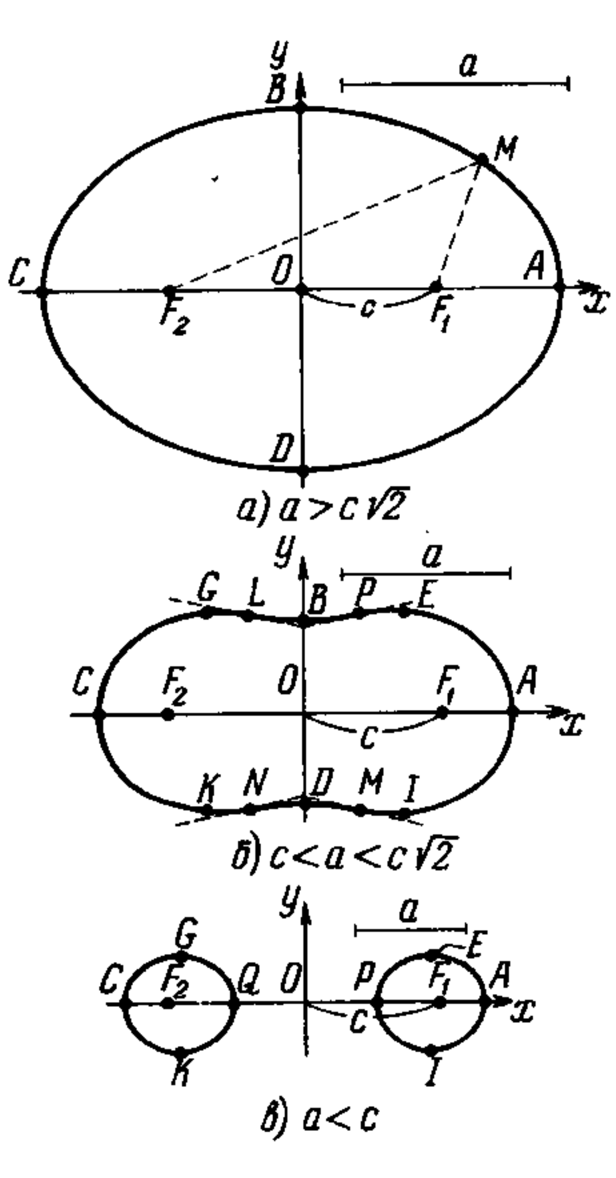


Рис. 1.55

если произведение ее расстояний до фиксированных точек F_1 и F_2 постоянно: $|MF_1|\cdot|MF_2|=a^2$; при этом F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$. Форма кривой зависит от отношения a/c:

а) $a\geqslant c\sqrt{2}$ (рис. 1.55, а). Вершины: $A(\sqrt{a^2+c^2},0)$, $C(-\sqrt{a^2+c^2},0)$, $B(0,\sqrt{a^2-c^2})$, $D(0,-\sqrt{a^2-c^2})$. Если $a=c\sqrt{2}$, то кривизна в точках B и D равна нулю (кривая имеет с касательными в B и D касание 3-го порядка).

б) $c<a<c\sqrt{2}$ (рис. 1.55, б). Имеются четыре точки перегиба: P, L, M, N. Их координаты: $x_P=-x_L=x_M=-x_N=\sqrt{(m-n)/2}$, $y_P=y_L=-y_M=-y_N=\sqrt{(m+n)/2}$, где $m=\sqrt{(a^4-c^4)/3}$, $n=(a^4-c^4)/(3c^2)$. Точки E и G, а также K и I имеют при $c\sqrt{2}>a$ общие касательные. Их координаты: $x_E=-x_G=-x_K=x_I=\sqrt{4c^4-a^4}/(2c)$, $y_E=y_G=-y_K=-y_I=a^2/(2c)$.

в) $a=c$ Лемниската (см. ниже).

г) $a<c$ (рис. 1.55, в). Пересечения с осью x: $A(\sqrt{a^2+c^2},0)$, $C(-\sqrt{a^2+c^2},0)$, $P(\sqrt{c^2-a^2},0)$, $Q(-\sqrt{c^2-a^2},0)$. Координаты точек E, G, I, K: $x_E=x_I=-x_G=-x_K=\sqrt{4c^4-a^4}/(2c)$, $y_E=y_G=-y_I=-y_K=a^2/(2c)$.

Лемниската (рис. 1.56). Уравнение кривой: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$, $a>0$. В полярных

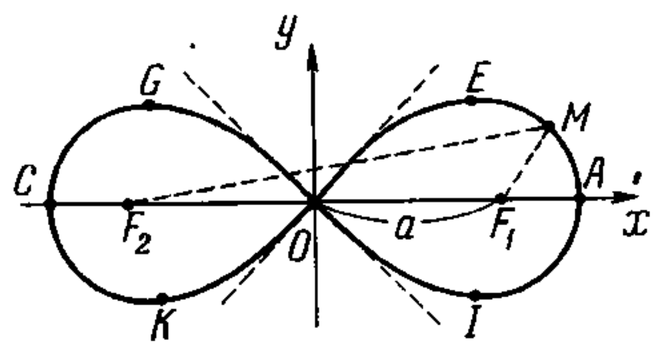


Рис. 1.56

координатах: $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Геометрическое определение: точка M плоскости лежит на кривой, если произведение ее расстояний до фиксированных точек $F_1(a,0)$ и $F_2(-a,0)$ постоянно: $|F_1M|\cdot|F_2M|=(|F_1F_2|/2)^2$. (Частный случай овала Кассини.) Начало координат – узловая точка с касательными $y=\pm x$, она же – точка перегиба. Пересечение кривой с осью x: $A(a\sqrt{2},0)$, $C(-a\sqrt{2},0)$; координаты точек E, G, I, K:

$$x_E=x_I=-x_G=-x_K=a\sqrt{3}/2,$$

$$y_E=y_G=-y_I=-y_K=a/2.$$

Радиус кривизны: $r=2a^2/(3\rho)$; площадь каждой петли: $S=a^2$.

1.3.2. ЦИКЛОИДЫ

Циклоидой называется кривая, описываемая точкой, отстоящей на фиксированное расстояние от центра круга, катящегося без скольжения по данной кривой – направляющей циклоиды.

Обыкновенная циклоида (рис. 1.57). Направляющая кривая – прямая линия. Уравнение в декартовых координатах: $a\cos((x+\sqrt{y(2a-y)})/a)=a-y$, $a>0$. В параметрической форме: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $-\infty<t<+\infty$, a – радиус катящейся окружности, $t=\angle MC_1B$ называется *углом качения*. Точки возврата: $O_k(2k\pi a,0)$. Вершины: $A_k((2k-1)\pi a,2a)$.

Длина дуги OM: $s = 8a\sin(t/4)$, $M(t)$ — текущая точка; длина дуги одной ветви OA_1O_1: $s = 8a$. Площадь между дугой OA_1O_1 и осью x: $S = 3\pi a^2$. Радиус кривизны: $R(t) = 4a\sin(t/4)$. Радиус

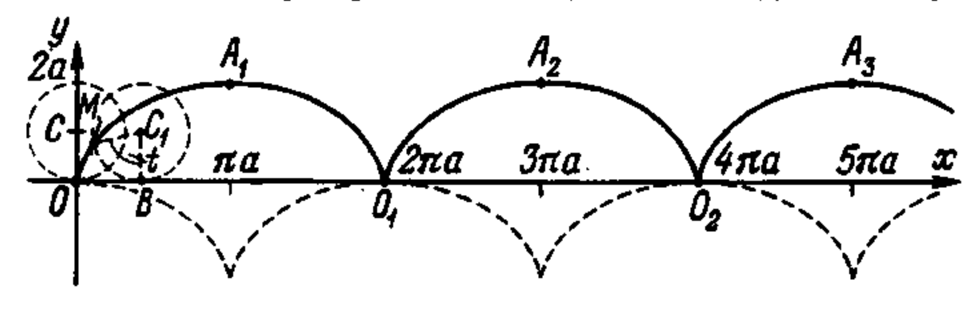


Рис. 1.57

кривизны в вершинах: $R_A = 4a$. Эволюта циклоиды (см. 4.3.1.5) — такая же циклоида (на рис. 1.57 изображена штриховой линией).

Укороченная и удлиненная циклоиды (трохоиды) (рис. 1.58). Уравнения в параметрической форме: $x = a(t - \lambda\sin t)$, $y = a(1 - \lambda\cos t)$, a — радиус окружности; $t = \angle MC_1P$ (угол качения); $\lambda a = \overline{C_1M}$ (при $\lambda > 1$ (рис. 1.58, *а*) — удлиненная циклоида, при $\lambda < 1$ (рис. 1.58, *б*) — укороченная циклоида). Вершины $A_k((2k-1)\pi a,$

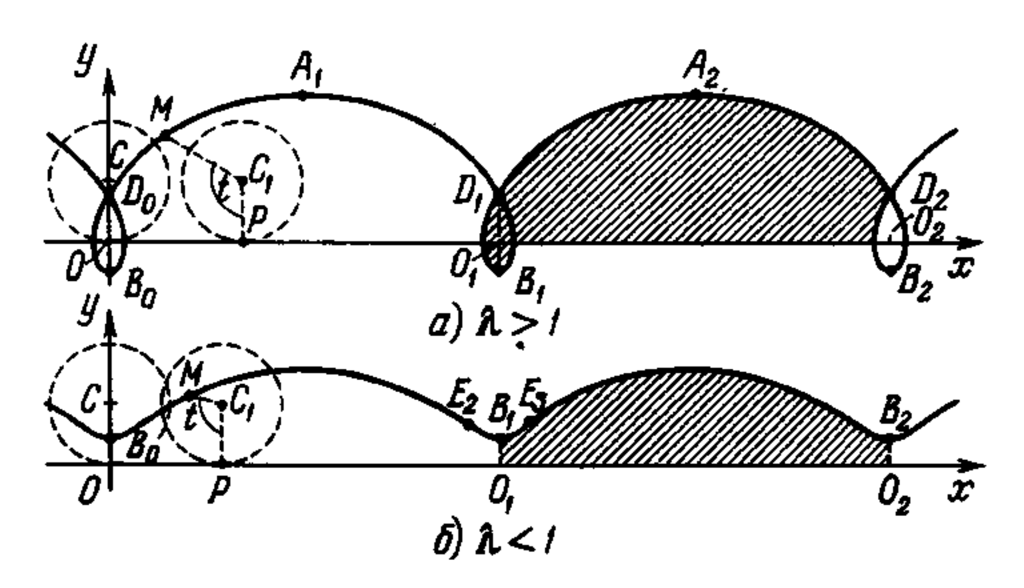


Рис. 1.58

$(1+\lambda)a)$ — максимум с радиусом кривизны $R_A = a(1+\lambda)^2/\lambda$ и $B_k(2k\pi a, (1-\lambda)a)$ — минимум с радиусом кривизны $R_B = a(1-\lambda)^2/\lambda$. Длина дуги B_kB_{k+1}: $a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,dt$. Площадь, заштрихованная на рис. 1.58: $S = \pi a^2(2+\lambda^2)$. Радиус кривизны: $R(t) = \dfrac{a(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t - \lambda)}$. Узловые точки D_k удлиненной циклоиды: $(2k\pi a,\ a(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2}))$, где t_0 — наименьший положительный корень уравнения $t - \lambda\sin t = 0$. Укороченная циклоида имеет точки перегиба:

$$E^{2k}(a(-\arccos\lambda + 2k\pi - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}),\ a(1-\lambda^2)),$$
$$E_{2k+1}(a(\arccos\lambda + 2k\pi - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}),\ a(1-\lambda^2)).$$

Эпициклоиды (рис. 1.59). Направляющая кривая — окружность радиуса b; окружность радиуса a катится без скольжения вне ее. Уравнения в параметрической форме:

$$x = (a+b)\cos\varphi - a\cos((a+b)\varphi/a),$$
$$y = (a+b)\sin\varphi - a\sin((a+b)\varphi(a),$$
$$-\infty < \varphi < +\infty,\ \varphi = \angle COA_1.$$

Вид кривых зависит от отношения $m = b/a$.

а) m — целое положительное число. Кривая состоит из m равных друг другу дуг, «обходящих» направляющую окружность (рис. 1.59, *а*). Достаточно рассмотреть изменения φ от нуля до 2π, так как кривая далее переходит сама в себя. При $m = 1$ получается *кардиоида* (см. 1.3.1.2). Точки возврата A_k при $1 \leqslant k \leqslant m$ получаются при значениях параметра $\varphi_{A_k} = 2(k-1)\pi/m$; вершины B_k — при $\varphi_{B_k} = (2k-1)\pi/m$.

б) $m = p/q$, p и q — положительные, целые, взаимно простые числа. Кривая состоит из p равных друг другу пересекающихся дуг (рис. 1.59, *б*). Кривая замкнута. Промежуток изменения параметра: $0 \leqslant \varphi < 2q\pi$.

в) Если m иррациональное, то кривая состоит из бесконечного числа равных друг другу дуг. Кривая не замкнута. Длина дуги между двумя точками возврата: $8(a+b)/m$. Площадь между

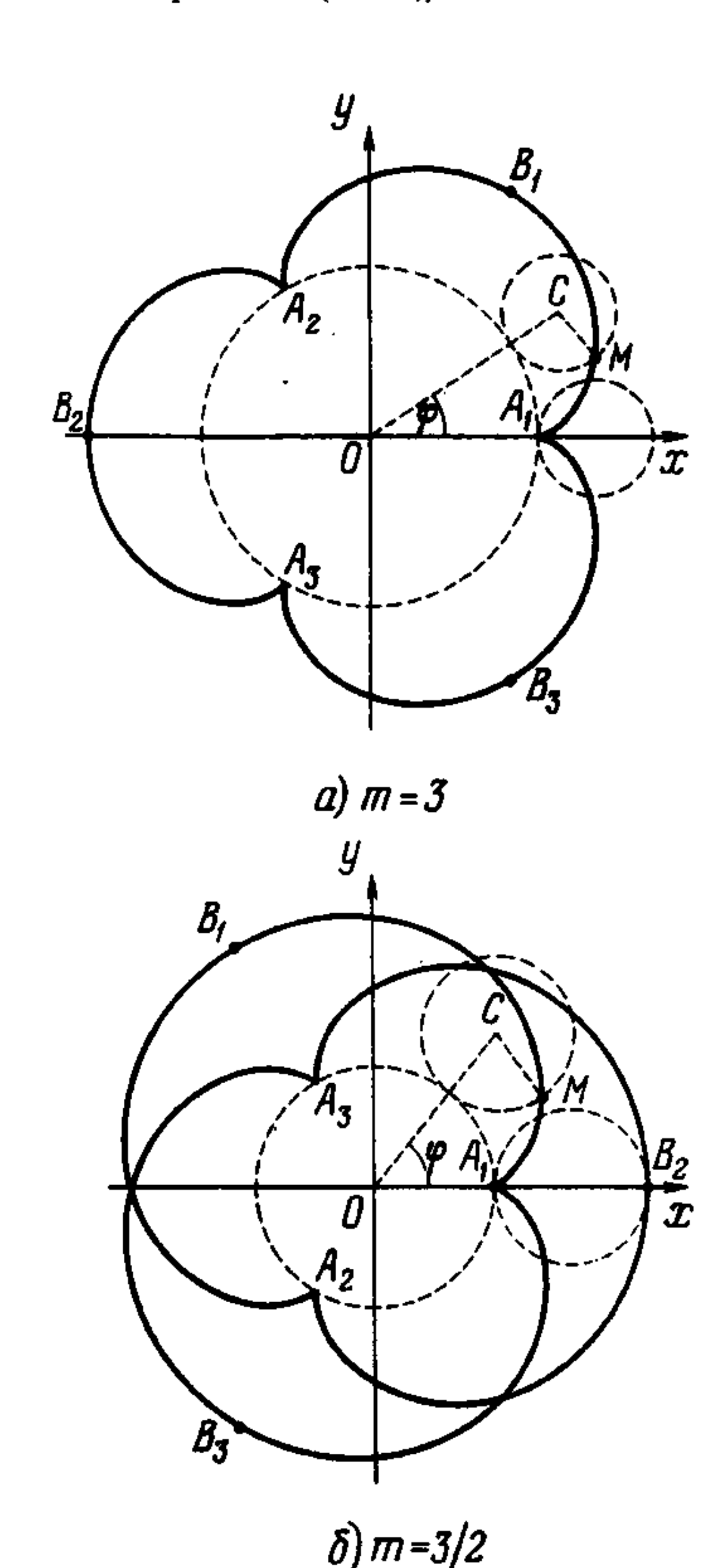


Рис. 1.59

дугой и направляющей окружностью: $S = \pi a^2(2a+3b)/b$. Радиус кривизны:

$$R(\varphi) = \frac{4a(a+b)\sin(b\varphi/(2a))}{2a+b};$$

в вершинах B_k:

$$R_{B_k} = \frac{4a(a+b)}{(2a+b)}.$$

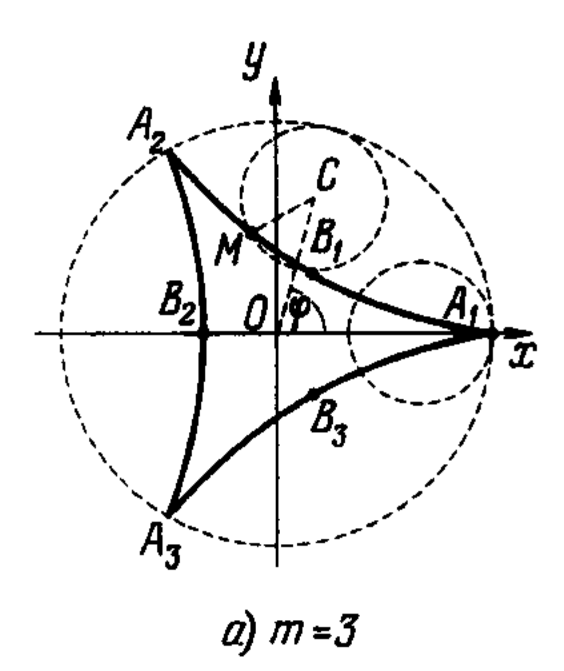
Гипоциклоиды (рис. 1.60). Направляющая кривая – окружность радиуса b; окружность радиуса a катится без скольжения внутри нее. Уравнения в параметрической форме:

$$x = (b - a)\cos\varphi + a\cos((b - a)\varphi/a),$$

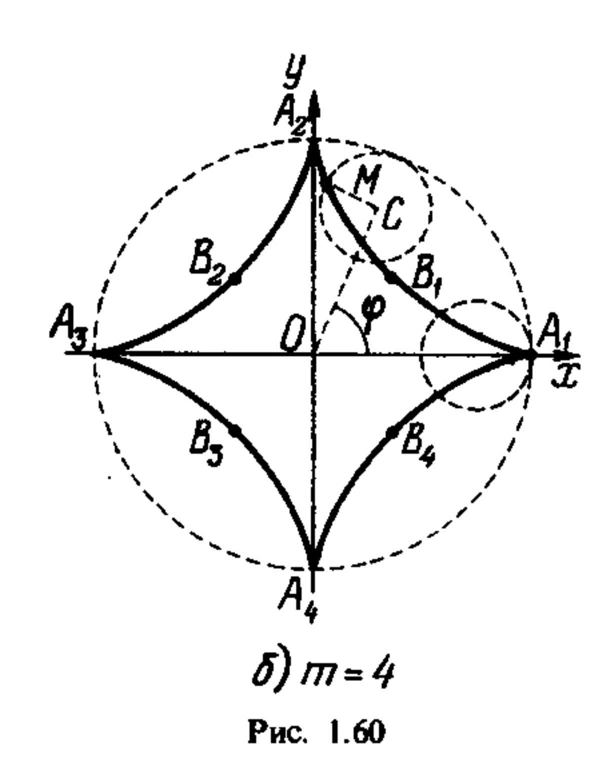
$$y = (b - a)\sin\varphi - a\sin((b - a)\varphi/a),$$

$$b > a, \quad -\infty < \varphi < \infty.$$

Так как $b > a$, то всегда $m = b/a > 1$. При $m = 2$ гипоциклоида вырождается в диаметр направляющей окружности. (О числе равных друг другу дуг кривых и параметрических интервалов см. эпициклоиды. Там же см. и значения параметров точек возврата и вершин.) Длина дуги одной ветви (между двумя точками возврата): $8(b - a)/m$. Площадь между одной ветвью и направляющей окружностью: $S = \pi a^2(3b - 2a)/b$. Радиус кривизны:



а) $m=3$



б) $m=4$

Рис. 1.60

$$R(\varphi) = \frac{4a(b - a)\sin(b\varphi/(2a))}{b - 2a};$$

и вершинах B_k:

$$R_{B_k} = \frac{4a(b - a)}{b - 2a}.$$

При $m = 3$ гипоциклоида с тремя ветвями (рис. 1.60, а); длина кривой: $s = 16a$; площадь, ограниченная кривой: $2\pi a^2$. В частном случае $m = 4$ получается *астроида* (рис. 1.60, б). Уравнения в параметрической форме: $x = b\cos^3\varphi$, $y = b\sin^3\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; в декартовых координатах: $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$, или $(x^2 + y^2 - b^2)^3 + 27x^2y^2b^2 = 0$ (алгебраическая кривая 6-го порядка). Длина кривой равна $s = 6b = 24a$; площадь, ограниченная кривой: $S = 3\pi b^2/8 = 6\pi a^2$.

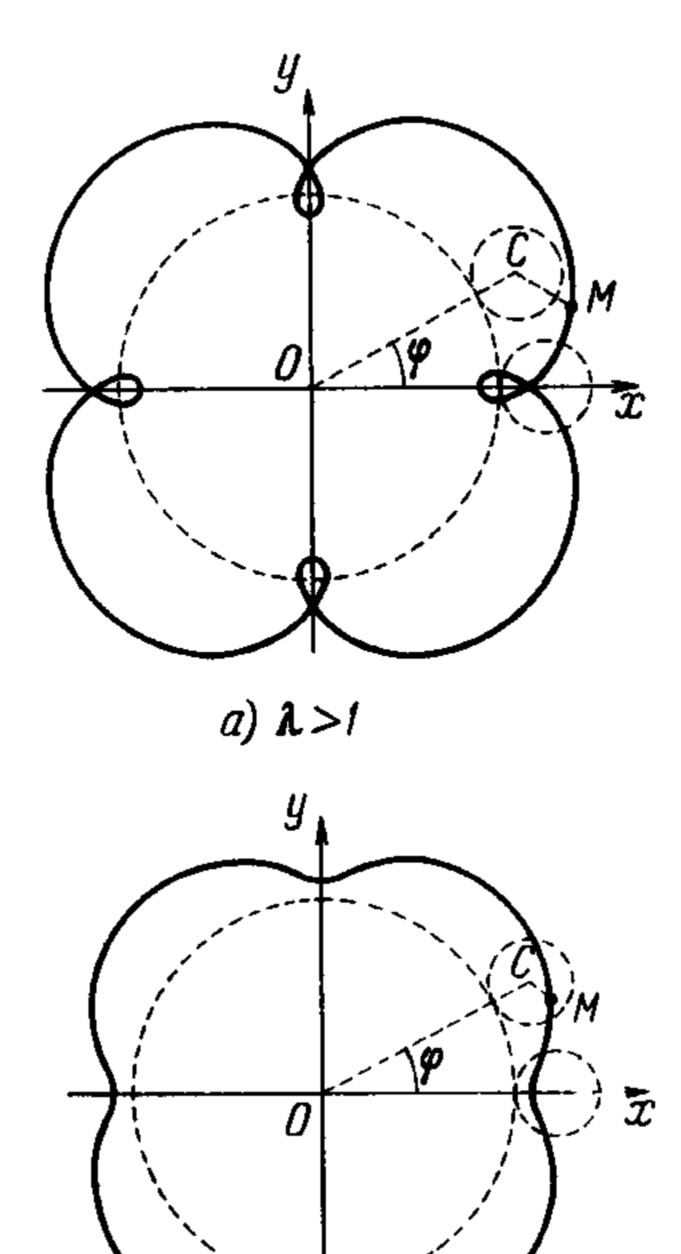
Удлиненная и укороченная эпи- и гипоциклоиды (рис. 1.61 и 1.62). Уравнения в параметрической форме удлиненных и укороченных эпициклоид:

$$x = (a + b)\cos\varphi - \lambda a\cos\frac{(a + b)\varphi}{a},$$

$$y = (a + b)\sin\varphi - \lambda a\sin\frac{(a + b)\varphi}{a},$$

$$a > 0, \; b > 0, \; \lambda a = \overline{CM}, \quad -\infty < \varphi < +\infty$$

(для удлиненной эпициклоиды $\lambda > 1$, рис. 1.61, а; для укороченной $\lambda < 1$, рис. 1.61, б).



а) $\lambda>1$

б) $\lambda<1$

Рис. 1.61

Параметрические уравнения удлиненной и укороченной гипоциклоид:

$$x = (b - a)\cos\varphi + \lambda a\cos\frac{(b - a)\varphi}{a},$$

$$y = (b - a)\sin\varphi - \lambda a\sin\frac{(b - a)\varphi}{a},$$

$$b > a > 0, \; \lambda a = \overline{CM}, \quad -\infty < \varphi < +\infty$$

(для удлиненной гипоциклоиды $\lambda > 1$, рис. 1.61, а; для укороченной $\lambda < 1$, рис. 1.62, б). Частные случаи:

а) гипоциклоида $b = 2a$: $x = a(1 + \lambda)\cos\varphi$, $y = a(1 - \lambda)\sin\varphi, \lambda \neq 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Кривая – *эллипс* с полуосями $a(1 + \lambda)$ и $|a(1 - \lambda)|$ (см. 2.6.6.1);

б) эпициклоида $b = a$:

$$x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi),\ y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi),$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

есть *улитка Паскаля* (см. 1.3.1.2; следует, однако,

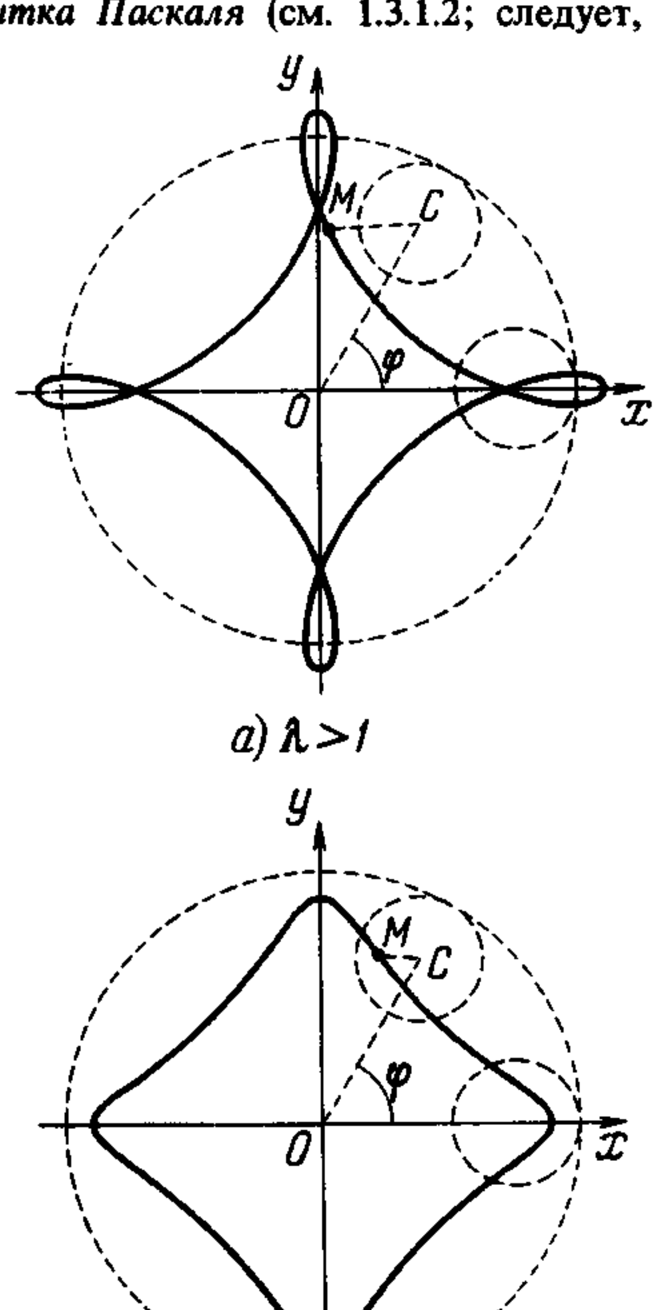


Рис. 1.62

обратить внимание на другое положение кривой относительно координатной системы).

1.3.3. СПИРАЛИ

Архимедовы спирали (рис. 1.63). Кривая представляет собой путь, описываемый некоторой точкой, движущейся с постоянной скоростью v

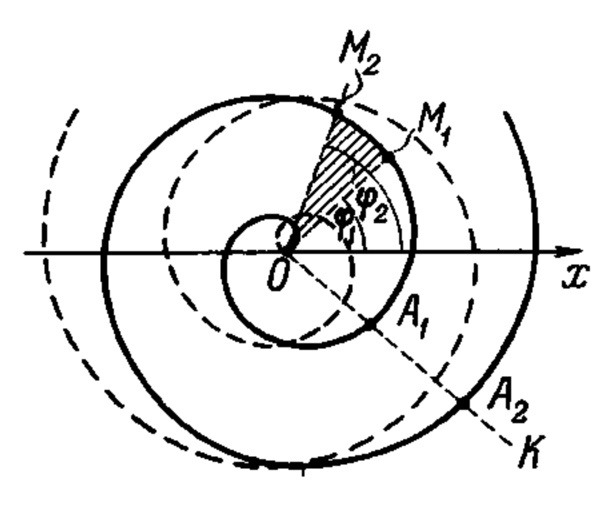


Рис. 1.63

по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скороостью ω. Уравнение в полярных координатах: $\rho = a\varphi$, $a = v/\omega > 0$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Первая ветвь: $0 \leqslant \varphi < +\infty$; вторая: $-\infty < \varphi \leqslant 0$ (на рис. 1.63 изображена штриховой линией). Каждый луч OK пересекает кривую в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, находящихся друг от друга на расстоянии $\overline{A_iA_{i+1}} = 2\pi a$. Длина дуги OM: $s = a(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{Arsh}\varphi)/2$; для больших φ имеем $\lim\limits_{\varphi\to+\infty} s/\varphi^2 = a/2$. Площадь сектора M_1OM_2: $a^2(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)/6$. Радиус кривизны: $R(\varphi) = a(\varphi^3 + 1)^{3/2}/(\varphi^2+2)$.

Гиперболические спирали (рис. 1.64). Уравнения в параметрическом виде: $x = (a\cos t)/t$, $y = (a\sin t)/t$, $-\infty < t < 0$ и $0 < t < +\infty$. Кривые

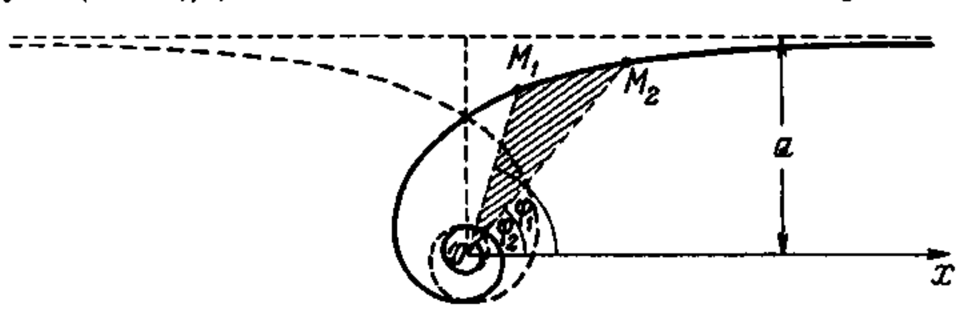


Рис. 1.64

состоят из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси y. Первая ветвь: $-\infty < t < 0$ (на рис. 1.64 штриховая линия); вторая ветвь: $0 < t < +\infty$. В полярных координатах уравнение первой ветви: $\rho = a/|\varphi - \pi|$, $-\infty < \varphi < \pi$; второй ветви: $\rho = a/\varphi$, $0 < \varphi < +\infty$. Для обеих ветвей прямая $y - a = 0$ — асимптота ($\varphi \to -\pi$ и $\varphi \to 0$), а точка O — асимптотическая точка ($\varphi \to -\infty$ и $\varphi \to +\infty$). Площадь заштрихованного сектора M_1OM_2: $S = a^2(1/\varphi_2 - 1/\varphi_1)/2$. Существует $\lim\limits_{\varphi_1\to\infty} S = a^2/(2\varphi_2)$. Радиус кривизны (вторая ветвь):

$$R(\varphi) = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3.$$

Логарифмические спирали (рис. 1.65). Уравнение в полярных координатах: $\rho = ae^{k\varphi}$, $a > 0$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Кривая пересекает все лучи,

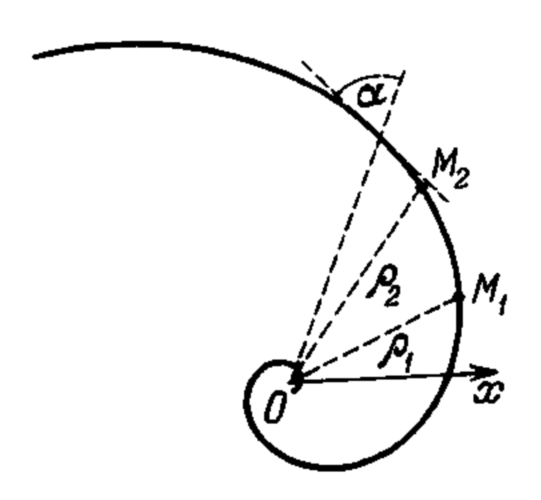


Рис. 1.65

выходящие из точки O, под одним и тем же углом α. При этом $k = \operatorname{ctg}\alpha$. При $\alpha = \pi/2$, т. е. при $k = 0$, кривая вырождается в окружность. Полюс O — асимптотическая точка кривой. Длина дуги M_1M_2: $s = (\rho_2 - \rho_1)\sqrt{1+k^2}/k$; длина дуги OM от начала до точки M с полярным радиусом ρ: $s_0 = \rho\sqrt{1+k^2}/k$. Радиус кривизны: $R(\rho) = \sqrt{1+k^2}\rho$.

Развертка (эвольвента) окружности (рис. 1.66; ср. также 4.3.1.5). Если A — некоторая

определенная точка на окружности радиуса a с центром в O, а M — произвольная точка эвольвенты, то длина дуги AB равна длине отрезка MB. Уравнения в параметрической форме:

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi,\ y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi,$$

$$-\infty < \varphi < +\infty,\ \varphi = \angle MOA.$$

Кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно оси x (при $-\infty < \varphi \leqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi < +\infty$), с общей точкой в

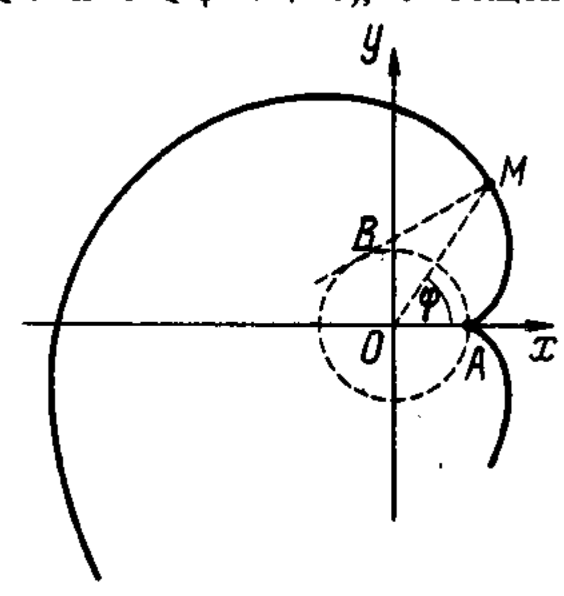


Рис. 1.66

точке возврата $A(a, 0)$. Длина дуги AM: $s = a\varphi^2/2$. Радиус кривизны: $R(\varphi) = a|\varphi|$. Все центры кривизны лежат на окружности радиуса a с центром в O.

Клотоида (рис. 1.67). Кривая проходит через точку O, причем величина, обратная радиусу

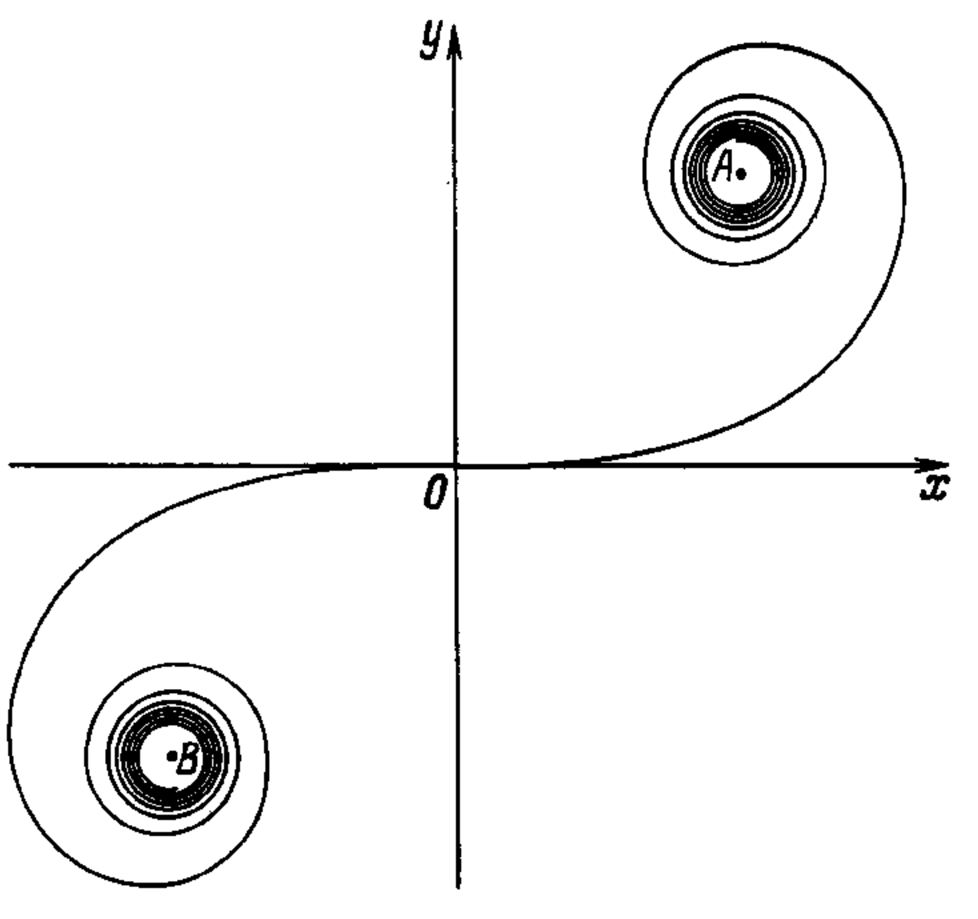


Рис. 1.67

кривизны (сама кривизна), в каждой точке M кривой пропорциональна длине дуги кривой $s = OM$, т. е. $1/R = sa^2$ (множитель пропорциональности $1/a^2$). Уравнения в параметрической форме*):

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi u^2}{2}du,\ y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi u^2}{2}du,$$

$$-\infty < t < +\infty,\ t = s/(a\sqrt{\pi}),\ s = \breve{OM},\ a > 0,$$

*) Эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

Точка O — центр симметрии кривой. Имеются две асимптотические точки:

$$A(a\sqrt{\pi}/2,\ a\sqrt{\pi}/2),\ B(-a\sqrt{\pi}/2,\ -a\sqrt{\pi}/2).$$

1.3.4. ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ И ТРАКТРИСА

Цепная линия (рис. 1.68). Форму цепной линии принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках.

Уравнение в декартовых координатах: $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $a > 0$. Кривая подобна графику функции $\bar{y} = \mathrm{ch}\,\bar{x}$ (см. 1.2.2.3) (преобразование подобия: $x = a\bar{x}$, $y = a\bar{y}$). Вблизи вершины $A(0, a)$ кривую

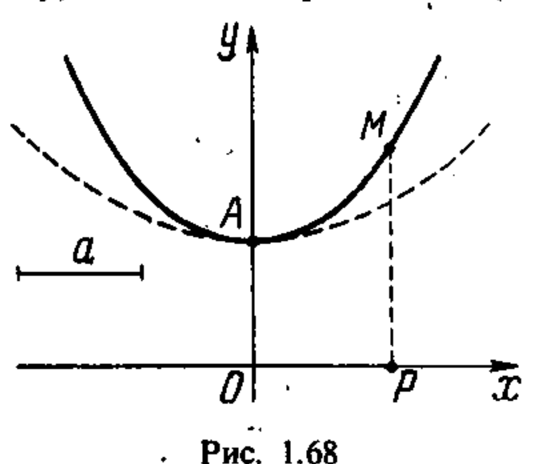


Рис. 1.68

можно приблизить параболой $y = a + x^2/(2a)$ (на рис. 1.68 штриховая линия). Длина дуги AM: $s(x) = a\,\mathrm{sh}(x/a)$. Величина площади криволинейной трапеции $OAMP$: $S(x) = as(x) = a^2\,\mathrm{sh}(x/a)$, где $M(x)$ — текущая точка кривой с абсциссой x. Радиус кривизны: $R = y^2/a = a\,\mathrm{ch}^2(x/a)$.

Трактриса. Пусть M — произвольная точка кривой, P — точка пересечения касательной в M с осью x; тогда $|PM| = a$, или, иными словами: если к одному концу нерастяжимой нити длины a прикреплена точка M, а другой конец нити движется по оси x, то M описывает трактрису (линию влечения, рис. 1.69). Уравнение правой ветви в декартовых координатах:

$$x = a\ln((a + \sqrt{a^2 - y^2})/y) - \sqrt{a^2 - y^2} =$$

$$= a\,\mathrm{Arch}(a/y) - \sqrt{a^2 - y^2},\ a > 0,\ 0 < y \leqslant a.$$

Уравнение левой ветви получается заменой x

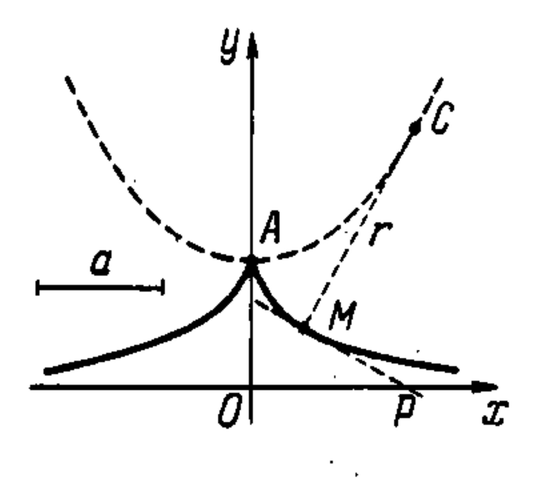


Рис. 1.69

на $-x$. Оба уравнения возведением обеих частей в квадрат можно привести к одному. Точка $A(0, a)$ — точка возврата, ось x — асимптота, ось y — ось симметрии. Длина дуги AM: $s(y) = a\ln(a/y)$; при этом $\lim\limits_{y\to 0}|s(y) - x(y)| = a(1 - \ln 2) \approx 0{,}3069\,a$.

Радиус кривизны: $R(y) = a\sqrt{a^2 - y^2}/y$; соответствующая кривая центров кривизны (эволюта, см. 4.3.1.5) — цепная линия (на рис. 1.69 штриховая линия) с уравнением $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

2.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

2.1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1.1.1. Представление чисел в позиционной системе счисления. Для представления чисел применяют цифры или, точнее говоря, цифровые ряды или (цифровые) слова, которые образуются путем упорядочения конечного числа знаков из конечного множества основных знаков (алфавита системы счисления).

Представление натуральных чисел. Различают два типа систем счисления: *непозиционные* (примером которых может служить римская система счисления) и *позиционные*. В позиционной системе счисления выбирают некоторое натуральное число p, большее единицы, и используют его в качестве базисного числа (p-ичная система счисления); для p, равного единице, позиционной системы счисления не существует. Вводят p основных знаков, называемых *цифрами*. Эти знаки используют для образования цифровых последовательностей, которые служат для представления натуральных чисел. (Будем обозначать цифры так: $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$.) Каждой цифровой последовательности, образованной только из одной цифры, однозначно сопоставим одно из $p-1$ первых натуральных чисел или нуль. Тогда всякое натуральное число a имеет точно одно представление в p-ичной системе счисления:

$$a = b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + \ldots + b_0 p^0,$$

где s обозначает однозначно определенное натуральное число, $b_0, \ldots, b_s$ – цифры, причем b_s – цифра, отличная от цифры, соответствующей нулю. Ряд знаков $b_s b_{s-1} \ldots b_0$ является цифровым представлением числа a. Число нуль представляется последовательностью, состоящей из одной цифры, соответствующей нулю. В позиционной системе представляемое число образуется аддитивно, причем каждая цифра b_j имеет *числовое значение* (число, которое соответствует цифре b_j) и *позиционное значение* (вес) p^j, если b_j стоит на j-м месте, считая справа (счет начинают с нуля, а не с единицы!). Аддитивный вклад этой цифры в значение числа равен $b_j p^j$.

Десятичная система: $p = 10$, цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например,

$$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 320091.$$

Двоичная система (*бинарная*, или *диадная*, система): $p = 2$, цифры 0, L*). Например,

$$\mathrm{L} \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + \mathrm{L} \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + \mathrm{L} \cdot 2^1 + \mathrm{L} \cdot 2^0 = \mathrm{L0L00LL}.$$

*) Чаще используются цифры 0 и 1.

Записанная в двоичной системе счисления последовательность L0L00LL обозначает число, значение которого в десятичной системе есть 83; действительно, $64 + 16 + 2 + 1 = 83$.

Чтобы иметь возможность представлять в позиционной системе также и некоторые рациональные числа, позиционные значения цифр в записи числа распространяют на степени p с отрицательными показателями. Для выделения позиционного значения (веса) p^0 необходим дополнительный знак (знак дробности), в качестве которого обычно берется запятая (иногда точка). Этот знак размещается в цифровой последовательности непосредственно справа от цифры с позиционным значением p^0. В соответствии с этим цифровая последовательность $b_s b_{s-1} \ldots b_0, \; b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-r}$ обозначает число, заданное p-ичным представлением

$$b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + \ldots + b_0 p^0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2} + \ldots + b_{-r} p^{-r}.$$

Цифра b_{-r} может иметь числовое значение нуль.

Примеры. Десятичная система: $23{,}040 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3}$.

Двоичная система: L0, 0LL $= \mathrm{L} \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + \mathrm{L} \cdot 2^{-2} + \mathrm{L} \cdot 2^{-3}$. Запись числа L0, 0LL в десятичной системе есть 2,375; действительно, $2 + 0{,}25 + 0{,}125 = 2{,}375$.

Каждое число, представимое в позиционной системе счисления последовательностью цифр конечной длины, является *рациональным числом*. Наоборот, в каждой позиционной системе можно представить точно только некоторое подмножество рациональных чисел (зависящее от выбора p). Например, рациональное число 1/3 не может быть представлено в десятичной системе счисления в виде конечной последовательности цифр; 1/25 в десятичной системе записывается как 0,04, а в двоичной системе счисления 1/25 конечной последовательностью цифр представлено быть не может.

Если a/b – рациональное число (a и b – взаимно простые натуральные числа), то a/b может быть точно представлено в позиционной системе с базисом p тогда и только тогда, когда каждый простой множитель в разложении числа b является простым множителем в разложении p.

Таким образом, в десятичной системе представимы только такие рациональные числа a/b (a, b – взаимно простые), у которых b содержит лишь простые множители 2 и 5.

2.1.1.2. Погрешности и правила округления чисел. Как было замечено в 2.1.1.1, не каждое рациональное и тем более не каждое действительное число можно представить в позиционной системе в виде конечной цифровой последовательности. Поэтому приходится применять *приближенные значения* представляемого числа, содержащие ограниченное число цифр. К этому прибегают и тогда, когда точное число содержит конечное, но слишком большое число цифр.

Простейшим способом получения приближенного значения числа является отбрасывание цифр в его точном изображении (обрыв), начиная с некоторого разряда. При этом погрешность приближения, т. е. разность $z - a$, где z — точное число, a — его приближение, всегда положительна и не превосходит единицы разряда последней сохраняемой цифры.

Примеры приближенных значений чисел, полученных отбрасыванием разрядов:

1,570 — приближенное значение для $\pi/2$ ($\approx 1{,}570796...$);

1,414 — приближенное значение для $\sqrt{2}$ ($\approx 1{,}414213...$);

0,210 — приближенное значение для 27/128 ($\approx 0{,}210875$).

Отбрасывание разрядов является простейшим способом *округления* чисел. Применяются и другие способы округления, из которых наиболее употребителен следующий:

1) Если за последней сохраняемой цифрой следует цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то никаких изменений в приближенное значение числа, представленного последовательностью предшествующих ей цифр, не вносится (*округление с недостатком*).

2) Если за последней сохраняемой цифрой следует 9, 8, 7, 6 или 5, то к ней прибавляется единица. Если последняя сохраняемая цифра 9, то она заменяется на 0 и на единицу повышается цифровое значение предшествующей ей цифры. Если эта цифра также 9, то действуют таким же образом до тех пор, пока не встретится цифра, отличная от 9 (*округление с избытком*).

Иногда применяется дополнительное правило:

3) Если за последней сохраняемой цифрой следует лишь цифра 5 или цифра 5, за которой все остальные цифры нули, и если последняя сохраняемая цифра имеет четное значение, осуществляется округление с недостатком; в противном случае — округление с избытком.

Примеры приближенных значений чисел, полученных таким округлением:

1,571 — приближенное значение для $\pi/2$;

1,414 — приближенное значение для $\sqrt{2}$;

0,211 — приближенное значение для 27/128;

10,000 — приближенное значение для 9,9995;

9,998 — приближенное значение для 9,9985.

В то время как при отбрасывании разрядов приближенное значение a числа z никогда не превосходит z, при округлении приближенное значение может быть больше или меньше числа z. Если a_r — приближенное значение z, полученное при округлении с недостатком или избытком с r десятичными разрядами после запятой, то *погрешность округления* равна $|a_r - z| \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-r}$. Приближенные значения, полученные при округлении, не обязательно должны иметь только значащие цифры (ср. 10,000 и 9,9995). Цифры в записи приближенного значения a числа z называются *верными цифрами*, если $|a - z|$ не превосходит половины позиционного значения последней цифры числа a. Запись приближенного значения, полученная путем отбрасывания и округления, состоит только из верных цифр.

Эти правила обеспечивают погрешность, не превосходящую по абсолютной величине половины единицы разряда последней сохраненной цифры. Все цифры округленного числа в таком случае оказываются *верными*, хотя фактически они могут и не совпадать с соответствующими цифрами в записи точного числа (см. примеры).

Приближенное число обычно характеризуют количеством сохраненных разрядов после запятой или количеством значащих цифр. К значащим цифрам относятся все цифры, кроме нулей слева. Так, например, числа 253; 70,2; 0,00375 имеют по три значащие цифры. При записи приближенных чисел все значащие цифры должны быть верными, если погрешность числа не указывается каким-либо другим способом.

При округлении чисел, бóльших 10, не следует писать нули, не являющиеся верными цифрами, а нужно выделять множитель вида 10^n. Так, например, число 139796,7, округленное до трех значащих цифр, следует записывать в виде $1{,}40 \cdot 10^5$ или $14{,}0 \cdot 10^4$.

2.1.2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

2.1.2.1. Абсолютные и относительные погрешности. Приближенные значения чисел появляются не только в результате обрыва и округления. Каждое измеряемое значение некоторой величины в общем случае также есть приближенное значение этой величины (ср. 7.1.1). Если a обозначает приближенное значение числа z, то $a - z$ называется *истинной погрешностью* a, а $(a - z)/z$ — *истинной относительной погрешностью* a. Но так как в большинстве случаев z неизвестно, то неизвестны как истинная, так и истинная относительная погрешности. Напротив, часто можно указать граничную величину истинной погрешности, т. е. положительное число Δa, для которого выполняется неравенство $|a - z| \leqslant \Delta a$, или $a - \Delta a \leqslant z \leqslant a + \Delta a$; Δa называется *пределом (границей) погрешности*, или *предельной абсолютной погрешностью*, или сокращенно *абсолютной погрешностью* a; $\delta a = \Delta a/a$ — *предельной относительной погрешностью* или сокращенно *относительной погрешностью* a. Относительная погрешность a часто указывается в процентах.

Примеры. 1) Если a_r — приближенное значение числа z, полученное путем обрыва (ср. 2.1.1.2), причем a_r содержит r знаков после запятой, то в качестве абсолютной погрешности может быть выбрано $\Delta a_r = 10^{-r}$. Если a_r получено округлением, то абсолютная погрешность равна $\Delta a_r = 0{,}5 \cdot 10^{-r}$.

2) Число 3,14 есть приближенное значение числа π. Так как 3,14159 также является приближенным значением π с пятью цифрами после запятой, то 0,0016 может быть выбрано в качестве абсолютной погрешности. Тогда относительная погрешность равна $\frac{0{,}0016}{3{,}14} = 0{,}00051$, или 0,051 %.

Формула	Относительная погрешность не превышает		
	0,1%	1%	10%
	Интервал $-d<x<d$ обозначается $\pm d$; интервал $a<x<b$ обозначается $a\div b$		
$\sin x \approx x$	$\pm 0{,}077$	$\pm 0{,}245$	$\pm 0{,}786$
$\sin x \approx x - x^3/6$	$\pm 0{,}580$	$\pm 1{,}005$	$\pm 1{,}632$
$\cos x \approx 1$	$\pm 0{,}045$	$\pm 0{,}141$	$\pm 0{,}451$
$\cos x \approx 1 - x^2/2$	$\pm 0{,}386$	$\pm 0{,}662$	$\pm 1{,}036$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$\pm 0{,}054$	$\pm 0{,}172$	$\pm 0{,}517$
$\operatorname{tg} x \approx x + x^3/3$	$\pm 0{,}293$	$\pm 0{,}519$	$\pm 0{,}895$
$\sqrt{a^2+x} \approx a + x/2a$	$-0{,}085a^2 \div 0{,}093a^2$	$-0{,}247a^2 \div 0{,}328a^2$	$-0{,}607a^2 \div 1{,}545a^2$
$1/\sqrt{a^2+x} \approx 1/a - x/2a^3$	$-0{,}051a^2 \div 0{,}052a^2$	$-0{,}157a^2 \div 0{,}166a^2$	$-0{,}448a^2 \div 0{,}530a^2$
$1/(a+x) \approx 1/a - x/a^2$	$\pm 0{,}031a$	$\pm 0{,}099a$	$\pm 0{,}301a$
$e^x \approx 1 + x$	$\pm 0{,}045$	$-0{,}134 \div 0{,}148$	$-0{,}375 \div 0{,}502$
$\ln(1+x) \approx x$	$\pm 0{,}002$	$\pm 0{,}020$	$-0{,}176 \div 0{,}230$

2.1.2.2. Приближенные границы погрешности функции. Пусть $f(x_1,\ldots,x_k)$ – функция переменных $x_1,\ldots,x_k$. Часто требуется знать предельную абсолютную погрешность Δf:

$$|f(a_1,\ldots,a_k) - f(x_1,\ldots,x_k)| \leqslant \Delta f,$$

при условии, что для значений переменных $x_1,\ldots,x_k$ известны предельные абсолютные погрешности Δa_i. Если $f(x_1,\ldots,x_k)$ имеет непрерывные частные производные f'_{x_i} по переменным x_i, $i=1,\ldots,k$, то обычно полагают (ср. 3.1.6.3)

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{k} \Delta a_i\,|f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_k)|.$$

Примеры. 1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2\ (f'_{x_1} = 1,\ f'_{x_2} = 1);$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$:

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2\ (f'_{x_1} = 1,\ f'_{x_2} = -1);$$

3) $f(x) = c\cdot x$ (c – постоянная):

$$\Delta(c\cdot a) = \Delta a\cdot|c|\ (f'_x = c);$$

4) $f(x_1, x_2) = x_1\cdot x_2$:

$$\Delta(a_1\cdot a_2) \approx \Delta a_1\cdot|a_2| + \Delta a_2\cdot|a_1|$$

$$(f'_{x_1} = x_2,\ f'_{x_2} = x_1),$$

$$\frac{\Delta(a_1\cdot a_2)}{|a_1\cdot a_2|} \approx \frac{\Delta a_1}{|a_1|} + \frac{\Delta a_2}{|a_2|};$$

5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$:

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \approx \Delta a_1\cdot\frac{1}{|a_2|} + \Delta a_2\cdot\frac{|a_1|}{a_2^2}$$

$$(f'_{x_1} = 1/x_1,\ f'_{x_2} = -x_1/x_2^2),$$

$$\frac{\Delta(a_1/a_2)}{|a_1/a_2|} \approx \frac{\Delta a_1}{|a_1|} + \frac{\Delta a_2}{|a_2|};$$

6) $f(x) = x^n$: $\Delta(a^n) \approx \Delta a\cdot|n\cdot a^{n-1}|$

$$(f'_x = nx^{n-1}),\qquad \frac{\Delta(a^n)}{|a^n|} \approx |n|\cdot\frac{\Delta a}{|a|};$$

7) $f(x) = \sin x$:

$$\Delta(\sin a) \approx \Delta a\cdot|\cos a|\quad (f'_x = \cos x).$$

Если функция $f(x)$ задана таблицей, то Δf находят посредством линейной интерполяции из таблицы в том случае, если Δa меньше, чем величина шага x в таблице вблизи a. Чаще всего Δf можно найти прямо из таблицы.

Пример. Для $a = 1{,}30$ и $\Delta a = 0{,}01$ найдем $\Gamma(a)$ из табл. 1.1.2.1: $\Gamma(1{,}30) = 0{,}89747$. Вследствие равенств $\Gamma(1{,}29) = 0{,}89904$ и $\Gamma(1{,}31) = 0{,}89600$ можно положить $\Delta(\Gamma(1{,}30)) = 0{,}002$ и за приближенное значение $\Gamma(1{,}30)$ принять число 0,897.

2.1.2.3. Приближенные формулы. Во многих случаях сложные функции можно приблизить более простыми. Для этого часто используют первые члены разложения в ряд Тейлора (ср. 3.1.14.6). В таблице на этой странице указаны некоторые приближенные формулы и относительные погрешности в соответствующих интервалах.

2.1.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2.1.3.1. Нахождение нулей функции $f(x)$. Для определения приближенного значения нуля функции $f(x)$ может применяться график этой функции (ср. 1.2). Иногда, как показывает следующий пример, целесообразно представить функцию в виде суммы двух слагаемых.

Пример. Найти приближенное значение нуля функции $f(x) = \sin x - x + 3$. Так как $\sin x - x + 3 = 0$ в случае,

когда $\sin x = x - 3$, то абсциссы точек пересечения графиков функций $g(x) = \sin x$ и $h(x) = x - 3$ как раз и есть нули $f(x)$. Функция $\sin x$ затабулирована (ср. 1.1.1.10), ее график легко построить. График функции $h(x) = x - 3$ – прямая, которую также легко построить (ср. 1.2.1.1).

Полученные приближенные значения могут быть улучшены посредством правила ложного положения и методом Ньютона (ср. 7.1.2.3).

2.1.3.2. Графическое дифференцирование. Если имеется график функции $f(x)$, то точки графика функции $f'(x)$ могут быть получены следующим способом.

1) На оси x в области задания функции $f(x)$ выбираем последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) На отрицательной части оси x вне области задания функции $f(x)$ выбираем точку P – полюс построения. Длина b отрезка PO называется *полюсным расстоянием*.

3) В точках кривой $f(x)$ с абсциссами x_i строим нормали к кривой. Для этого пригодно прямоугольное карманное зеркало (лучше всего металлическое), которое вертикально ставят на плоскость чертежа. Если кривая без излома переходит в свое зеркальное отражение, то ребро зеркала покажет направление нормали.

4) На каждую из полученных нормалей опускаем перпендикуляры из P, которые пересекают ось y в точках Q_i. Эти перпендикуляры проходят параллельно касательным в точках $(x_i, f(x_i))$.

5) Точка пересечения прямой, проходящей через Q_i параллельно оси x, с прямой $x = x_i$ является точкой графика $f'(x)$ (рис. 2.1).

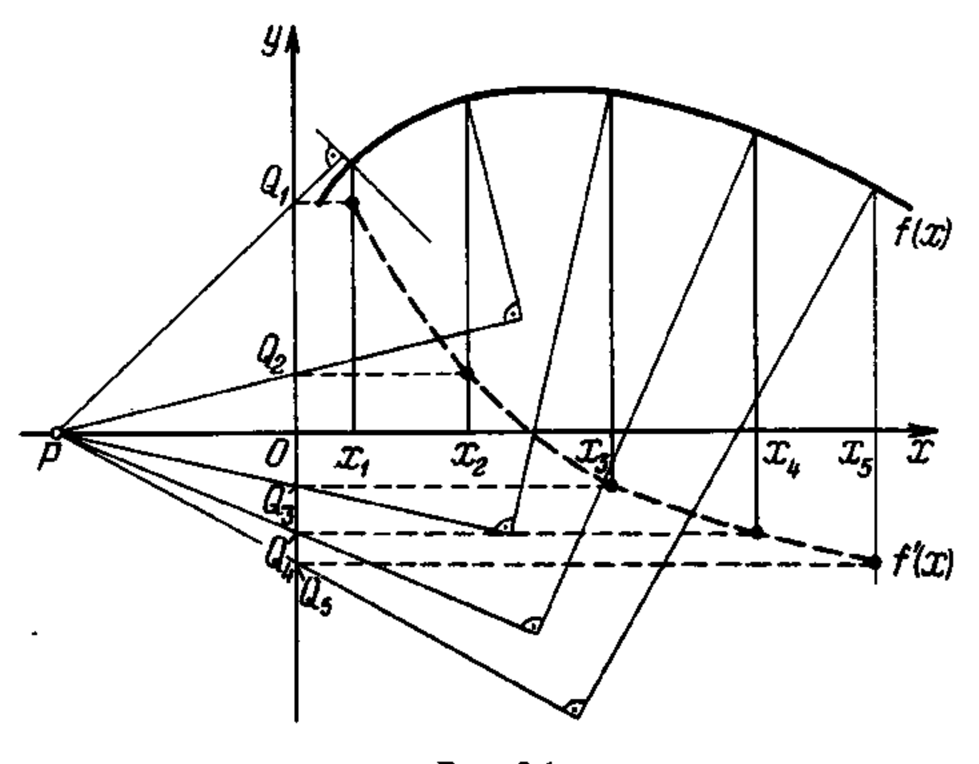


Рис. 2.1

Масштаб $f'(x)$ зависит от используемых масштабов m_x по оси x и m_y по оси y и от полюсного расстояния b. Если ξ и η – длины отрезков между точками с координатами (0, 0) и (x, 0) и соответственно между (0, 0) и (0, y), то $x = m_x\xi$ и $y = m_y\eta$. Тогда, обозначив ординаты точек построенной кривой через η', для наклонов прямых, построенных параллельно касательным, получим

$$\frac{\eta'}{b} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{m_x}{m_y}\frac{dy}{dx};$$

таким образом,

$$y' = \frac{m_y}{m_x b}\eta',$$

т. е.

$$m_{y'} = \frac{m_y}{m_x b}.$$

2.1.3.3. Графическое интегрирование. Если имеется график функции $f(x)$, то график функции $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ можно приближенно заменить ломаной следующим способом.

1) Разделим отрезок $I = [x_0, x]$ промежуточными точками разбиения на частичные отрезки I_k. При этом следует обратить внимание на то, чтобы относительные экстремумы функции $f(x)$ не лежали внутри частичных отрезков.

2) Для каждого частичного отрезка часть плоскости между осью x и кривой $f(x)$ заменим (приблизительно) равновеликим прямоугольником, проведя параллель к оси x так, чтобы отброшенная часть площади была примерно равной добавленной (заштрихованы на рис. 2.2). Пусть

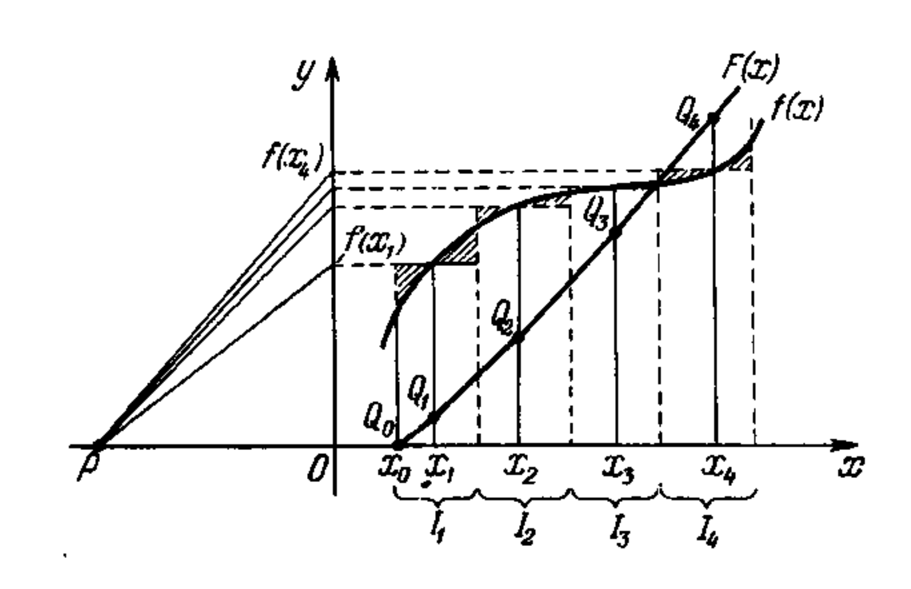


Рис. 2.2

x_k есть абсцисса точки пересечения, определенная однозначно (вследствие 1) прямой, параллельной оси x, с графиком $f(x)$ на частичном отрезке I_k; тогда точка пересечения этой же прямой с осью y имеет координаты $(0, f(x_k))$.

3) Выберем на отрицательной полуоси x и вне области задания функции $f(x)$ точку P – полюс построения. Пусть b обозначает длину отрезка PO (полярное расстояние).

4) Проведем через точку $Q_0 = (x_0, 0)$ параллель к прямой, проходящей через точки P и $(0, f(x_1))$. Пусть эта параллель пересекает прямую $x = x_1$ в точке Q_1. Через Q_1 проведем параллель к прямой, проходящей через точки P и $(0, f(x_2))$. Пусть эта параллель пересекает прямую $x = x_2$ в точке Q_2 и т. д. Ломаная $Q_0Q_1\ldots Q_n$ есть приближенный график функции $F(x)$.

Пусть снова (как и в случае графического дифференцирования) $x = m_x\xi$, $y = m_y\eta$ и H_k – длины отрезков между точками $(x_k, 0)$ и Q_k. Тогда для $Y = F(x)$ выполняется соотношение $Y = m_Y H$. Если по методу графического дифференцирования с тем же полюсом P в точках с абсциссами x_k $(k > 0)$ построить точки кривой производной функции $F(x)$, то получим точки $(x_k, f(x_k))$. Отсюда для масштабов следует, что

$$m_y = m_Y/(m_x b),$$

т. е.

$$m_Y = m_x m_y b.$$

2.2. КОМБИНАТОРИКА

2.2.1. ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

2.2.1.1. Факториал и гамма-функция. Функция $f(n)$, для которой

$$f(0) = 1, \quad f(n+1) = (n+1)f(n)$$

при всех целых неотрицательных n, называется *n-факториалом* и обозначается $n!$. Для любого натурального n имеем $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Примеры. $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Значения функций $n!$ и $1/n!$ см. в табл. 1.1.1.5.

Для приближенного вычисления $n!$ в случае очень больших чисел n пользуются *формулой Стирлинга*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

или

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

Определение гамма-функции $\Gamma(x)$ *по Эйлеру.* Для всех действительных чисел $x > 0$ (ср. 3.1.9.4)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Определение гамма-функций $\Gamma(x)$ *по Гауссу.* Для всех действительных чисел x, кроме $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}.$$

При $x > 0$ оба определения дают одинаковую функцию.

Основные свойства гамма-функции (см. также 3.1.9.4).

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x},$$

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x}.$$

Некоторые специальные значения гамма-функции: $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Таблицу значений функции см. в 1.1.2.1. График функции см. на рис. 2.3.

Полюсы $\Gamma(x)$: $x_p = 0, \ -1, \ -2, \ -3, \ldots$ Вследствие первых двух свойств для всех натуральных чисел n имеем $\Gamma(n+1) = n!$. Поэтому гамма-функция может рассматриваться как обобщение факториала. Для приближенного вычисления значения функции $\Gamma(x)$ при больших положительных значениях x может быть использована *формула Стирлинга*: $\Gamma(x+1) \approx (x/e)^x \sqrt{2\pi x}$.

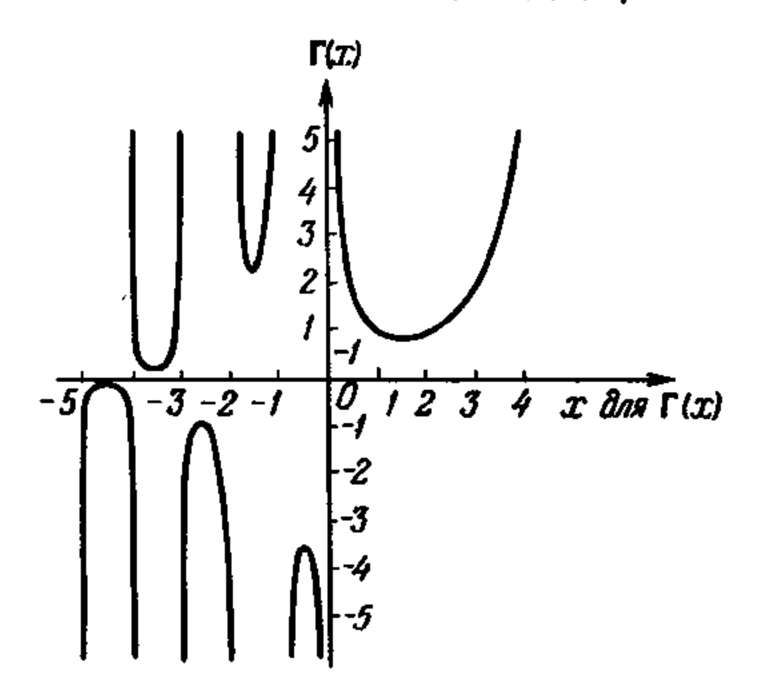


Рис. 2.3

2.2.1.2. Биномиальные коэффициенты. Для всех целых неотрицательных чисел n, k функция C_n^k (или $\binom{n}{k}$):

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{для } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{для } 0 \leqslant n < k, \end{cases} \tag{2.1}$$

называется *биномиальным коэффициентом*. Читается: C из n по k (или n над k).

Значения биномиальных коэффициентов могут быть последовательно определены из так называемого *треугольника Паскаля*:

n	C_n^k
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
...	....

Каждый коэффициент образуется путем сложения двух стоящих над ним (справа и слева). Крайние значения известны для любого n: $C_n^0 = C_n^n = 1$. В строке с номером n слева направо стоят значения $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$.

Область определения биномиальных коэффициентов можно расширить: именно, для всех действительных a и для всех целых $k \geqslant 0$ функция

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)}{k!} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

также называется *биномиальным коэффициентом*.

Для целых $a \geqslant 0$ оба определения совпадают.

Примеры. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10,$

$$\binom{-2}{3} = \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} = -4, \quad \binom{2}{5} = 0,$$

$$\binom{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-3)}{4!} = \frac{13-9\sqrt{2}}{12}.$$

Свойства биномиальных коэффициентов. Для целых $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ справедливо свойство симметрии:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad \text{или} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \qquad (2.3)$$

Для действительных a, b имеют место теоремы сложения:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1},$$

$$\binom{a}{0} + \binom{a+1}{1} + \binom{a+2}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{a+k}{k} = \binom{a+k+1}{k},$$

$$\binom{a}{0}\binom{b}{k} + \binom{a}{1}\binom{b}{k-1} + \ldots + \binom{a}{k}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{k}. \qquad (2.4)$$

Если $a = b = n$, где n – целое неотрицательное, то из (2.3) и (2.4) следует (ср. также 2.2.2.1), что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

2.2.1.3. Полиномиальный коэффициент. Определенная для всех натуральных n и всех наборов неотрицательных целых чисел $[k_1, k_2, \ldots, k_r]$, для которых $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, функция $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, или $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$:

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}, \qquad (2.5)$$

называется *полиномиальным коэффициентом.*

Примечание. Биномиальный коэффициент C_n^k есть частный случай полиномиального коэффициента $C_n(k_1, k_2)$, где $k_1 = k$, $k_2 = n - k$.

Примеры. $C_6(2, 1, 3) = \frac{6!}{2!1!3!} = 60,$

$$C_{12}(2, 3, 3, 4) = \frac{12!}{2!3!3!4!} = 277200.$$

2.2.2. ФОРМУЛЫ БИНОМА И ПОЛИНОМА

2.2.2.1. Формула бинома Ньютона. Для всех действительных чисел a, b и для всех натуральных чисел n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n. \qquad (2.6)$$

Примечание. Биномиальные коэффициенты формулы (2.6) составляют в треугольнике Паскаля строку с номером n.

Если заменить b на $-b$, то из формулы (2.6) следует

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Пример. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$

Из (2.6) получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \text{ при } a = b = 1, \qquad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \text{ при } a = 1,\ b = -1. \qquad (2.8)$$

Вычитанием или сложением (2.7) и (2.8) получим равенства

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^m = 2^{n-1},$$
$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^m = 2^{n-1};$$

при этом в первом случае m – наибольшее нечетное число, а во втором – наибольшее четное число, не превосходящее n.

2.2.2.2. Формула полинома. Для любых отличных от нуля действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и любого натурального n

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n =$$

$$= \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r}. \qquad (2.9)$$

При этом суммирование распространяется на все наборы неотрицательных целых чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, для которых $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

При $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = r^n.$$

Пример. $(a+b+c)^3 = C_3(3, 0, 0)a^3 + C_3(2, 1, 0)a^2b + C_3(2, 0, 1)a^2c + C_3(1, 2, 0)ab^2 + C_3(1, 1, 1)abc + C_3(1, 0, 2)ac^2 + C_3(0, 3, 0)b^3 + C_3(0, 2, 1)b^2c + C_3(0, 1, 2)bc^2 + C_3(0, 0, 3)c^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$

2.2.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КОМБИНАТОРИКИ

Во многих математических исследованиях встречаются комбинаторные задачи, своеобразие которых целесообразно показать на примерах.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг? (Ср. 2.2.4.1.)

2. Как велико число различных отображений, переводящих множество из n элементов в себя? (Ср. 2.2.4.1.)

3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 1, 5, 5, 9? (Ср. 2.2.4.5.)

4. В турнире принимают участие восемь команд. Сколько различных предсказаний относительно распределения трех первых мест (по результатам соревнований) можно сделать? (Ср. 2.2.5.1.)

5. Сколько различных трехбуквенных слов можно составить из 32 букв алфавита, не обращая внимания на то, имеют ли смысл составленные из букв слова или нет? (Ср. 2.2.5.2.)

6. Сколькими способами можно из множества k (различных) элементов выбрать r элементов? (Ср. 2.2.6.1.)

7. Как велико число различных результатов бросаний двух не отличимых друг от друга кубиков? (Ср. 2.2.6.2.)

Приведенные примеры показывают, что в задачах комбинаторики интересуются вообще числом различных выборок определенных объектов, причем в зависимости от вида дополнительных требований следует различать, какие выборки считаются одинаковыми и какие различными.

2.2.4. ПОДСТАНОВКИ

2.2.4.1. Подстановки. Каждая последовательность k различных предметов с учетом порядка называется *перестановкой* этих предметов. Если пронумеровать места этих предметов слева направо: $1, 2, \ldots, k$, то можно сформулировать следующее определение:

взаимно однозначное отображение p^k конечного упорядоченного множества $M = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ из k элементов на себя называется *подстановкой* элементов множества M.

Перестановки из k элементов множества M отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов.

Число $P_k = P(p^k)$ всех перестановок p^k из k различных элементов равно

$$P_k = k!. \tag{2.10}$$

Примеры. Для примеров 1 и 2 п. 2.2.3 из (2.10) следует: имеется $10! = 3628800$ различных способов расстановки на полке 10 книг и $n!$ взаимно однозначных отображений, переводящих множество из n элементов в себя.

2.2.4.2. Группа подстановок k элементов. Если выбрать $M = \{1, 2, \ldots, k\}$, то каждую подстановку p^k этих элементов можно записать как матрицу из двух строк:

$$p^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \end{pmatrix},$$

где

$$\{s_1, \ldots, s_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{2.11}$$

$$p^k(i) = s_i \quad \text{для всех} \quad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Это делает возможным определение *произведения* $p_1^k \cdot p_2^k$ двух подстановок k элементов как последовательного проведения обоих преобразований:

$$(p_1^k \cdot p_2^k)(i) = p_2^k(p_1^k(i)).$$

Для этого записывают обе подстановки в виде матриц и переставляют столбцы второго множителя так, чтобы первая строка второго множителя совпадала со второй строкой первого множителя. Матрица произведения состоит из первой строки первого множителя и преобразованной второй строки второго множителя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_k \end{pmatrix}.$$

Пример 1.

$$p_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_1^4 \cdot p_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Для каждых двух подстановок p_1^k и p_2^k элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ произведение $p_1^k \cdot p_2^k$ есть однозначно определенная подстановка p^k.

2) Произведение есть ассоциативная (но не коммутативная) бинарная операция: $(p_1^k \cdot p_2^k) \cdot p_3^k = p_1^k \cdot (p_2^k \cdot p_3^k)$.

3) Для подстановки $p_e^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$ (*тождественная подстановка*) при всех p^k имеет место равенство $p_e^k \cdot p^k = p^k \cdot p_e^k = p^k$.

4) Для каждой подстановки $p^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \end{pmatrix}$ существует *обратная подстановка* $(p^k)^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$, для которой выполняется соотношение $(p^k)^{-1} \cdot p^k = p^k \cdot (p^k)^{-1} = p_e^k$.

Вследствие 1)–4) и (2.10) все подстановки p^k элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ образуют (см. 2.4.1.6) группу порядка $k!$.

Эта группа называется *симметрической группой* S_k.

Пример 2. Элементы симметрической группы S_3:

$$p_e^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице подстановки p^k элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ встречаются два столбца $\begin{pmatrix} \ldots & s_i & \ldots & s_j & \ldots \\ \ldots & t_i & \ldots & t_j & \ldots \end{pmatrix}$, для которых $s_i < s_j$, а $t_i > t_j$ (или $s_i > s_j$, а $t_i < t_j$), то такая пара столбцов называется *инверсией* подстановки p^k.

Подстановка называется *четной* или *нечетной* в зависимости от того, четно или нечетно число встречающихся в ней инверсий.

Пример 3. Если $Z(p_i^3)$ – число инверсий, то для подстановок примера 2:

$$Z(p_e^3) = 0, \quad Z(p_1^3) = Z(p_2^3) = 1, \quad Z(p_3^3) = 3, \quad Z(p_4^3) = Z(p_5^3) = 2.$$

Отображение группы S_k во множество $\{-1, 1\}$, определенное следующим образом: $\chi(p^k) = 1$, если p^k – четная подстановка, и $\chi(p^k) = -1$, если p^k – нечетная подстановка, называется *характеристикой подстановки* группы S_k. Вследствие равенства $\chi(p_1^k \cdot p_2^k) = \chi(p_1^k) \cdot \chi(p_2^k)$ это отображение гомоморфно.

Множество всех четных подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$ образует подгруппу группы S_k порядка $k!/2$. Эта подгруппа называется *знакопеременной группой*.

2.2.4.3. Подстановки с неподвижной точкой. Если p^k – подстановка множества $M = \{1, \ldots, k\}$, то

каждый элемент $i \in M$, для которого $p^k(i) = i$, называется *неподвижной точкой подстановки* p^k.

Пример. Для подстановок примера 2 п. 2.2.4.2 справедливо следующее: p_1^3 имеет неподвижную точку 3, p_2^3 – точку 1, p_3^3 – точку 2, p_e^3 имеет неподвижные точки 1, 2 и 3; p_4^3 и p_5^3 таковых не имеют.

Число $F(p^k)$ всех подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$, имеющих по крайней мере одну неподвижную точку, равно

$$F(p^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i (k-i)!, \qquad (2.12)$$

где C_k^i – биномиальные коэффициенты. Число $G(p^k)$ всех подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$, имеющих в точности одну неподвижную точку, равно

$$G(p^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i i (k-i)!. \qquad (2.13)$$

Пример. Пять человек занимают места за столом, не обращая внимания на разложенные на столе именные карточки. В общей сложности они могут разместиться $5! = 120$ способами. В

$$F(p^5) = C_5^1 \cdot 4! - C_5^2 \cdot 3! + C_5^3 \cdot 2! - C_5^4 \cdot 1! + C_5^5 \cdot 0! = 76$$

случаях по крайней мере один человек и в

$$G(p^5) =$$
$$= C_5^1 \cdot 1 \cdot 4! - C_5^2 \cdot 2 \cdot 3! + C_5^3 \cdot 3 \cdot 2! - C_5^4 \cdot 4 \cdot 1! + C_5^5 \cdot 5 \cdot 0! = 45$$

случаях в точности один человек займет отведенное ему место.

2.2.4.4. Подстановки с заданным числом циклов. Если матрицу подстановки p^k перестановкой столбцов можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & \ldots & s_k \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_r & s_1 & t_{r+1} & \ldots & t_k \end{pmatrix},$$

то p^k задает взаимно однозначное отображение $s_i \to s_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, $s_r \to s_1$, множества $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ на себя, которое называется *циклом длины* r и обозначается $Z_r = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$. В соответствии с этим каждой неподвижной точке соответствует цикл длины 1.

Каждую подстановку p^k можно однозначно (с точностью до порядка сомножителей) представить в виде произведения циклов, не имеющих общих элементов.

Примеры.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 4, 3, 5) \cdot (2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1, 2, 3) \cdot (4, 5) \cdot (6).$$

Для числа $P(k, s)$ подстановок p^k, которые могут быть представлены в виде произведения s циклов, имеют место рекуррентные формулы

$$P(k, k) = 1, \quad P(k, 1) = (k-1)! \quad \text{при } k \geqslant 1, \qquad (2.14)$$
$$P(k, s) = P(k-1, s-1) + (k-1) \cdot P(k-1, s) \quad \text{при } k > s \geqslant 2.$$

Пример. Имеется $P(3, 3) = 1$ подстановка группы S_3 (ср. пример 2 п. 2.2.4.2) с тремя циклами: p_e^3; $P(3, 1) = 2$ подстановки с одним циклом: p_4^3 и p_5^3; $P(3, 2) = P(2, 1) + 2 \cdot P(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ подстановки с двумя циклами: p_1^3, p_2^3 и p_3^3.

2.2.4.5. Перестановки с повторениями. Если рассматривать упорядоченные k-наборы из множества M, которые состоят не только из различных элементов множества M, то получим перестановки с повторениями.

Пусть $M = \{s_1, \ldots, s_p\}$ – непустое множество из p элементов и $i_1, i_2, \ldots, i_p$ – натуральные числа такие, что $\sum_{j=1}^{p} i_j = k$. Каждый упорядоченный набор k чисел $p_{i_1, i_2, \ldots, i_p}^k$, содержащий элемент s_j ровно i_j раз $(1 \leqslant j \leqslant p)$, называется *перестановкой множества* M *с повторением*.

Примечание. При $i_1 = i_2 = \ldots = i_p = 1$ получим перестановки множества из p элементов.

Число $C_k(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ различных перестановок множества M с повторениями равно*)

$$C_k(i_1, i_2, \ldots, i_p) = \frac{k!}{i_1! i_2! \ldots i_p!}, \qquad (2.15)$$

где $\sum_{j=1}^{p} i_j = k$.

Пример. Имеется $C_6(3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$ различных шестизначных чисел, содержащих трижды цифру 1, дважды цифру 5 и один раз цифру 9 (ср. пример 3 п. 2.2.3).

2.2.5. РАЗМЕЩЕНИЯ

2.2.5.1. Размещения. Любой упорядоченный набор r различных элементов множества M, состоящего из k элементов, называется *размещением* a_r^k из k элементов по r.

Примечание. Каждое размещение a_r^k есть взаимно однозначное отображение упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, r\}$ во множество M. Из определения следует, что $r \leqslant k$. При $r = k$ получаем подстановки множества M.

Число $A_k^r = A(a_r^k)$ различных размещений есть

$$A_k^r = \frac{k!}{(k-r)!} = k(k-1)\ldots(k-r+1). \qquad (2.16)$$

Примеры. 1) Имеется A_4^2 различных взаимно однозначных отображений множества $\{1, 2\}$ во множество $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, т. е. $A_4^2 = 12$.

2) Имеется $A_8^3 = 336$ различных способов распределения трех первых мест при восьми командах, участвующих в соревновании (ср. пример 4 п. 2.2.3).

2.2.5.2. Размещения с повторениями. Любой упорядоченный набор r элементов множества M, содержащего k элементов, называется *размещением с повторениями* $\tilde{a}_r^k$ из k элементов по r.

Примечание. Каждое размещение с повторениями $\tilde{a}_r^k$ есть однозначное отображение упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, r\}$ в M. При этом возможно, что $r > k$.

Число $A(\tilde{a}_r^k)$ различных размещений с повторениями есть

$$A(\tilde{a}_r^k) = k^r. \qquad (2.17)$$

Пример. Число различных трехбуквенных слов, которые можно составить из 32 букв алфавита, есть $A(\tilde{a}_3^{32}) = 32^3 = 32\,768$ (ср. пример 5 п. 2.2.3).

*) Ср. 2.2.1.3.

2.2.6. СОЧЕТАНИЯ

2.2.6.1. Сочетания. Любое подмножество из r элементов множества, содержащего k элементов, называется *сочетанием* c_r^k из k элементов по r.

Примечание. Если объединить все размещения a_r^k из k элементов по r, состоящие из одних и тех же элементов (не учитывая расположения), в классы эквивалентности, то каждому классу будет соответствовать ровно одно сочетание c_r^k и наоборот.

Примеры. 1) Пары $\{s_1, s_2\}$, $\{s_1, s_3\}$, $\{s_1, s_4\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_2, s_4\}$, $\{s_3, s_4\}$ исчерпывают все сочетания из четырех элементов по два.

2) Имеется одно сочетание из k элементов по 0 (т. е. не содержащее ни одного элемента) – это пустое множество.

Число $C_k^r = C(c_r^k)$ всех различных сочетаний равно

$$C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}. \tag{2.18}$$

Пример. В числовом лото надо выбрать 5 чисел из 90. Для этого существует $C_{90}^5 = 43\,949\,268$ способов (ср. пример 6 п. 2.2.3).

2.2.6.2. Сочетания с повторениями. Объединим все размещения $\tilde{a}_r^k$ с повторением из k элементов по r, состоящие из одинакового количества одних и тех же элементов (без учета расположения), в классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности называется *сочетанием с повторением* $\tilde{c}_r^k$ из k элементов по r.

Примечание. Два размещения a_r^k и $a_r'^k$ или $\tilde{a}_r^k$ и $\tilde{a}_r'^k$ принадлежат одному сочетанию c_r^k или $\tilde{c}_r^k$ соответственно только тогда, когда существует перестановка p^r множества $\{1, 2, \ldots, r\}$ такая, что для всех $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ имеет место равенство

$$a_r^k(i) = a_r'^k(p^r(i)) \quad \text{или} \quad \tilde{a}_r^k(i) = \tilde{a}_r'^k(p^r(i)).$$

Ср. примечания в 2.2.5.1, 2.2.5.2 и 2.2.6.1.

Число $f_k^r = C(\tilde{c}_r^k)$ различных сочетаний с повторением из k элементов по r равно

$$f_k^r = C_{k+r-1}^r = C_{k+r-1}^{k-1} = \frac{(k+r-1)!}{r!(k-1)!}. \tag{2.19}$$

Пример. При наличии двух неразличимых кубиков можно получить $f_6^2 = C_7^2 = 21$ различный результат бросаний (ср. пример 7 п. 2.2.3).

2.3. КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

2.3.1. ОБОЗНАЧЕНИЕ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – (конечная) последовательность действительных чисел (ср. 2.3.2), то можно составить конечную последовательность сумм и произведений.

Для конечных сумм и произведений чисел приняты обозначения:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n. \tag{2.20}$$

Входящая в выражения (2.20) переменная i называется *индексом суммирования (индексом умножения)*, а целые числа 1 и n – *пределами суммирования (пределами умножения)*. Значение суммы (произведения) не зависит от обозначения индекса суммирования (индекса умножения) – это так называемая *немая* переменная:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Иногда бывает необходимо перейти к новому индексу суммирования с одновременным изменением пределов суммирования. Так, например, полагая в первой сумме $i = k + r$, где r – целое число, а k – новый индекс, получим, что новые пределы по индексу k равны соответственно $1 - r$ и $n - r$ и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1-r}^{n-r} a_{k+r}.$$

2.3.2. КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Конечная (действительная) *числовая последовательность* есть однозначное отображение множества $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 1$, во множество действительных чисел. При этом образ натурального числа $i \in A_n$ обозначается a_i и называется *членом последовательности*. Последовательность обозначается посредством $[a_i]_1^n$. Последовательность может быть задана прямым перечислением ее членов или каким-нибудь алгебраическим выражением.

Примеры. 1) Последовательность, заданная прямым перечислением членов:

$$[a_i]_1^5 = 4,\ -1,\ 3/5,\ 4,\ 4.$$

2) Последовательность, заданная алгебраическим выражением:

$$[3i - i^2]_1^6 = 2,\ 2,\ 0,\ -4,\ -10,\ -18.$$

Если задана последовательность $[a_i]_1^n = a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 1$, то из нее можно образовать другую последовательность:

$$[d_i]_1^{n-1} = [a_{i+1} - a_i]_1^{n-1} = a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \ldots,\ a_n - a_{n-1}; \tag{2.21}$$

она называется *последовательностью первых разностей* последовательности $[a_i]_1^n$. Если $n > 2$, то из последовательности первых разностей можно снова образовать последовательность первых разностей, которую называют *последовательностью вторых разностей* исходной последовательности. Если продолжать так дальше, то процесс оборвется на последовательности $(n-1)$-х разностей, так как она состоит только из одного члена.

Если $[d_i]_1^{n-1}$ – последовательность первых разностей последовательности $[a_i]_1^n$, то

$$d_1 = a_2 - a_1,\ d_1 + d_2 = a_3 - a_1,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n-1} d_i = a_n - a_1. \tag{2.22}$$

Если $a_1 = 0$, то a_n равно сумме $n-1$ членов последовательности первых разностей.

Конечная последовательность $[a_i]_1^n$ называется *постоянной*, если существует такое действительное a, что $a_i = a$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. В соответствии с этим конечная последовательность длины $n = 1$ постоянна.

2.3.2.1. Арифметическая прогрессия. Конечная последовательность называется *арифметической прогрессией 1-го порядка*, если последовательность ее первых разностей постоянна ($a_i - a_{i-1} = d$ — *разность арифметической прогрессии*). Последовательность называется *арифметической прогрессией m-го порядка*, если последовательность m-х разностей постоянна, а $(m-1)$-х не постоянна.

Если $[a_i]_1^n$ — арифметическая прогрессия 1-го порядка и d — ее разность, то

$$a_i = a_1 + (i-1)d,$$

а сумма членов равна

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i = n(a_1 + a_n)/2 = na_1 + (n-1)nd/2.$$

Если $[a_i]_1^n$ — арифметическая прогрессия порядка m, то существует многочлен

$$P_m(i) = c_m i^m + \ldots + c_1 i + c_0$$

такой, что для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется равенство $a_i = P_m(i)$.

При $m = 1$ для последовательности $[a_i]_1^n$ с постоянной разностью d этот многочлен имеет вид

$$a_i = di + (a_1 - d).$$

Пример. Последовательность $[i^2]_1^n = 1,\ 2^2,\ \ldots,\ n^2$ есть арифметическая прогрессия 2-го порядка, $P_2(i) = i^2$. Последовательность первых разностей имеет вид $[d_i]_1^{n-1}$, где $d_i = (i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$. Последовательность вторых разностей записывается в виде $[d_i]_1^{n-2}$, где $d_i = 2(i+1) + 1 - (2i+1) = 2$.

Если рассматривать $[i^2]_1^n$ как последовательность первых разностей последовательности $[a_i]_1^{n+1}$, то $[a_i]_1^{n+1}$ есть арифметическая прогрессия 3-го порядка. Тогда существует многочлен третьей степени по i такой, что при всех i выполняется равенство $a_i = c_3 i^3 + c_2 i^2 + c_1 i + c_0$. Если выбрать $a_1 = 0$, то первые четыре члена последовательности $[a_i]_1^{n+1}$ будут равны 0, 1, 5, 14. Из системы уравнений $i^3 c_3 + i^2 c_2 + i c_1 + c_0 = a_i$ при $i = 1, 2, 3, 4$ (или из одной из интерполяционных формул (ср. 7.1.2.6.1)) для неизвестных коэффициентов c_3, c_2, c_1, c_0 получаем

$$c_3 = 1/3, \quad c_2 = -1/2, \quad c_1 = 1/6, \quad c_0 = 0$$

и, далее,

$$a_i = \frac{1}{3} i^3 - \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{6} i,$$
$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

2.3.2.2. Геометрическая прогрессия. Каждая последовательность $[a_i]_1^n$, у которой частное от деления двух соседних членов постоянно: $a_{i+1}/a_i = q$ для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, называется *геометрической прогрессией*. Число q называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Общий вид членов геометрической прогрессии:

$$a_i = a_1 q^{i-1}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\};$$

сумма всех членов геометрической прогрессии ($q \neq 1$) равна

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} =$$
$$= a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

2.3.3. НЕКОТОРЫЕ КОНЕЧНЫЕ СУММЫ

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (p+n) = \dfrac{(n+1)(2p+n)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

7) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

9) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

2.3.4. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ *)

Если заданы n (не обязательно различных) действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то число

$$m_A = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}$$

называется *средним арифметическим* чисел $a_1, \ldots, a_n$, а $m_Q = \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$ — *средним квадратичным* чисел $a_1, \ldots, a_n$. Если a и b — неотрицательные действительные числа, то

$$m_G = \sqrt{ab}$$

называется *средним геометрическим* чисел a и b или *средним пропорциональным* чисел a и b.

Из равенства $m_G^2 = ab$ следует, что $a : m_G = m_G : b$.

Для среднего арифметического $m_A(a, b)$ и среднего геометрического $m_G(a, b)$ неотрицательных чисел a и b справедливы следующие утверждения:

1) $m_G(a, b) \leqslant m_A(a, b)$;

2) a, $m_A(a, b)$, b — арифметическая прогрессия 1-го порядка; a, $m_G(a, b)$, b — геометрическая прогрессия. Если a и b — длины отрезков, то отрезки длин $m_A(a, b)$ и $m_G(a, b)$ можно построить циркулем и линейкой (рис. 2.4 и 2.5).

*) О средних значениях см. также 3.1.1.4.

Золотое сечение. Если $a > 0$, то разложение этого числа на два положительных слагаемых x и $a - x$ называется *золотым сечением* числа a,

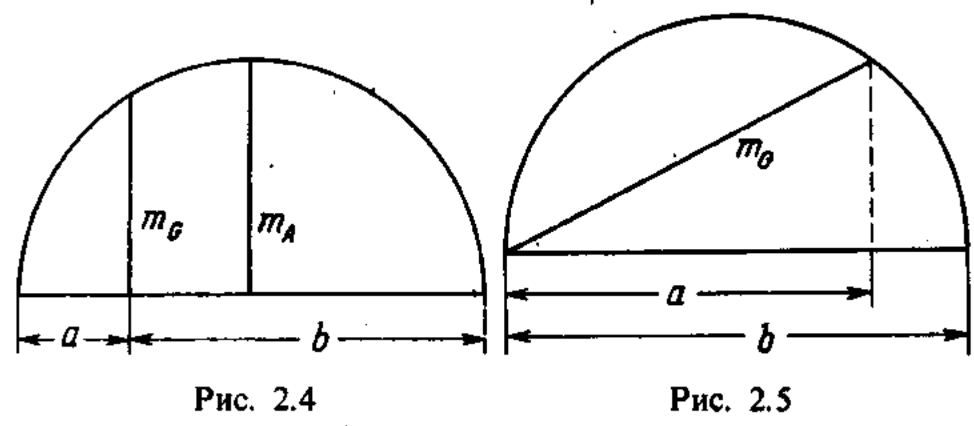


Рис. 2.4 Рис. 2.5

если x является средним геометрическим чисел a и $a - x$. Из равенства $x = \sqrt{a(a-x)}$ следует:

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a \approx 0{,}618a.$$

Если считать a длиной отрезка, то отрезок длиной x определяется построением, приведенным на рис. 2.6.

Из равенства $x^2 = a(a - x) = a^2 - ax$ следует, что $a^2 = x^2 + ax = x(x + a)$, в соответствии с чем a

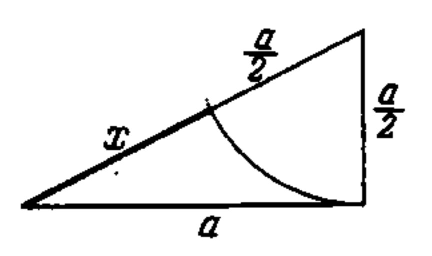


Рис. 2.6

есть среднее геометрическое чисел x и $x + a$. Таким образом, если x делит число a в золотом сечении, то a в свою очередь делит в золотом сечении число $x + a$.

2.4. АЛГЕБРА

2.4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

2.4.1.1. Алгебраические выражения. В современной математике *алгеброй* называют науку о системах объектов («величин»), над которыми определены операции, аналогичные сложению и умножению действительных чисел. Различные объекты могут иметь различные *имена*, а для обозначения операций над ними применяются различные *знаки*. Существенной частью алгебры является *грамматика алгебраических выражений*, определяющая правила построения выражений из имен объектов, знаков операций и вспомогательных знаков (так называемых разделителей). Мы ограничимся употреблением простейшей системы обозначений, при которой величины обозначаются отдельными буквами, быть может, с подстрочными индексами (например, x, y_3, a_{152})*). Будем считать также определенными основные действия: сложение (+), вычитание (−), умножение (· или ×)**) и деление (: или /). Умножение и деление считаются действиями более старшими, чем действия сложения и вычитания. В выражениях, содержащих несколько знаков действий, выполняются сначала все более старшие действия, а затем младшие. Действия одинакового старшинства выполняются по порядку, слева направо. Для изменения порядка действий могут применяться скобки. Правильные выражения должны содержать одинаковое количество открывающих и закрывающих скобок, которые всегда могут быть объединены в систему вложенных пар. Первыми должны выполняться действия внутри самых внутренних скобок (не содержащих скобок внутри себя), затем внутри скобок следующего уровня и т. д. Для удобства иногда употребляются скобки разного вида, как-то: ( ), [ ], { }, однако они должны встречаться парами и не нарушать систему вложенности; например, выражение $(a \cdot \{b + c) - d\}$ неправильное. Если допускается нелинейная запись, то изменение порядка действий при делении может быть показано записью «в два этажа» – с горизонтальной чертой в качестве знака деления (а также косой чертой), т. е. записи

$$(a + b):(c + d) - f \text{ и } \frac{a+b}{c+d} - f \text{ (и } (a+b)/(c+d) - f)$$

равноценны.

Возведение в целую степень определяется как повторное умножение и обозначается знаком ↑ или подстрочной записью показателя степени: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ обозначается $a \uparrow n$ или a^n. Возведение в степень рассматривается как действие более старшее, чем умножение и деление. Например, $a \uparrow m/n$ совпадает с $(a \uparrow m)/n$, а не с $a \uparrow (m/n)$*).

2.4.1.2. Значения алгебраических выражений. Если не ограничиваться свойствами алгебраических выражений самих по себе как абстрактных выражений, то возникают вопросы, связанные с интерпретацией этих выражений на некоторой конкретной системе допустимых объектов, которые могут замещать алгебраические величины. Мы ограничимся рассмотрением алгебраических выражений над какими-либо системами чисел, допускающими упомянутые выше действия (см. 3.1.1 и 3.4.2). Поскольку при этом алгебраические выражения могут быть вычисляемы, если входящим в них величинам придавать числовые значения, их иногда называют *арифметическими выражениями*.

Следует заметить, что основными действиями являются сложение и умножение.

Если рассматривать только натуральные (целые положительные) числа, то вычитание – действие, обратное сложению, – не всегда окажется выполнимым и потребует введения нуля и отрицательных целых чисел; деление (на число, отличное от нуля) – действие, обратное умножению, – окажется выполнимым, если мы введем в рассмотрение рацио-

*) В алгоритмических языках (см. 7.2.1), допускающих только линейную запись (в одну строку), используются имена из нескольких букв и цифр, начинающиеся всегда с буквы, например: *y3*, *abc*, *beta1*.

**) Если употребляются только однобуквенные имена, знак умножения может быть опущен, например, вместо $3 \cdot a \cdot b$ можно писать $3ab$.

*) Возведение в нецелую степень определено ниже (см. 2.4.1.4).

нальные числа. Существуют разнообразные системы чисел, допускающих вычисление произвольных рациональных (т. е. использующих только четыре арифметических действия) выражений, например числа вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b – рациональные.

При рассмотрении алгебраических выражений во многих случаях выделяют некоторые *основные величины (переменные)*, отличая их от других, называемых *коэффициентами* или *параметрами*. При этом возможно считать допустимыми для основных величин и для параметров различные системы чисел. Так, например, рассматривая алгебраические уравнения (см. 2.4.2) с целыми или действительными коэффициентами, можно искать корни среди целых, действительных или комплексных чисел.

Алгебраические выражения можно преобразовывать, заменяя одно выражение другим. Такие преобразования называются *допустимыми (тождественными)*, если после преобразования выражение будет сохранять свое значение при подстановке любых чисел допустимых систем. При преобразованиях используются основные свойства арифметических действий (здесь и далее в этом пункте знак равенства употребляется в смысле тождественности):

коммутативность (*перестановочность*):

$$a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a;$$

ассоциативность (*сочетательность*):

$$a+(b+c)=(a+b)+c,\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c;$$

дистрибутивность (*распределительность*):

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Из этих свойств вытекают формулы действий над степенями:

$$x^m\cdot x^n=x^{m+n},\quad (x\cdot y)^m=x^m\cdot y^m,\quad (x^m)^n=x^{m\cdot n},$$
$$x^m/x^n=x^{m-n},\quad (x/y)^m=x^m/y^m.$$

Некоторые формулы преобразований:

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2,$$
$$(x+y+\ldots+t+u)^2=x^2+y^2+\ldots+t^2+u^2+$$
$$+2xy+\ldots+2xt+2xu+\ldots+2yu+\ldots+2tu,$$
$$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3,$$
$$(x\pm y)^n \text{ (см. 2.2.2.1)},$$
$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2,$$
$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+$$
$$+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$
$$x^{2k}-y^{2k}=(x+y)(x^{2k-1}-x^{2k-2}y+x^{2k-3}y^2-$$
$$-\ldots+xy^{2k-2}-y^{2k-1}),$$
$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-$$
$$-\ldots-xy^{2k-1}+y^{2k}).$$

2.4.1.3. Многочлены. Если в алгебраическом выражении основные величины (переменные) участвуют только в действиях сложения, вычитания и умножения, включая возведение в целую степень, то такие выражения называются *целыми рациональными* (см. 2.5.1). Используя свойства арифметических действий, любое целое рациональное выражение можно представить в виде *многочлена* (суммы одночленов):

$$A_1\cdot X_1+A_2\cdot X_2+\ldots+A_n\cdot X_n,$$

где A_i – коэффициенты выражения, не содержащие переменных, а X_i – произведения степеней переменных. Многочлен обычно располагают в порядке убывания или возрастания степеней какой-нибудь переменной либо суммы степеней всех переменных. Одночлены, в которых выражения X_i тождественны, т. е. содержат одинаковые переменные в одних и тех же степенях, называются *подобными* и обычно *приводятся* – объединяются в один, коэффициент в котором равен сумме коэффициентов приводимых одночленов. Сумма степеней всех переменных в одночлене называется *степенью* этого *одночлена*. Наибольшая из степеней одночленов называется *степенью многочлена*.

Сумма, разность и произведение многочленов также являются многочленами. Степень суммы или разности не превосходит наибольшей из степеней слагаемых, степень произведения равна сумме степеней сомножителей.

Деление многочленов (с остатком). Если $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены по x степеней n и m соответственно, $n\geqslant m$, то всегда существуют однозначно определенные многочлены $T(x)$ степени $n-m$ и $R(x)$ степени, меньшей чем m, такие, что тождественно $P(x)=Q(x)\cdot T(x)+R(x)$. Для нахождения *частного* $T(x)$ и *остатка* $R(x)$ выполняют деление $P(x)$ на $Q(x)$.

Пример.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4 & x^2-2ax+3a^2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^4-6ax^3+9a^2x^2} & 3x^2-4ax+5a^2 \\ \quad -4ax^3+13a^2x^2-24a^3x & \\ \quad \underline{-4ax^3+8a^2x^2-12a^3x} & \\ \qquad 5a^2x^2-12a^3x+10a^4 & \\ \qquad \underline{5a^2x^2-10a^3x+15a^4} & \\ \qquad\qquad -2a^3x-5a^4 & \end{array}$$

Таким образом, $3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4=$ $=(x^2-2ax+3a^2)(3x^2-4ax+5a^2)+(-2a^3x-5a^4)$.

Если $R(x)\equiv 0$ (нулевой многочлен), то многочлен $Q(x)$ называется *делителем* многочлена $P(x)$. Для нахождения общего наибольшего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ применяется *алгоритм Евклида*. Выполняется цепочка делений до получения остатка, равного нулю:

$$P(x)=Q(x)\cdot T_1(x)+R_1(x),$$
$$Q(x)=R_1(x)\cdot T_2(x)+R_2(x),$$
$$R_1(x)=R_2(x)\cdot T_3(x)+R_3(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{m-2}(x)=R_{m-1}(x)\cdot T_m(x)+R_m(x),$$
$$R_{m-1}(x)=R_m(x)\cdot T_{m+1}(x).$$

Предшествующий ему остаток $R_m(x)$ является общим наибольшим делителем. Если он не содержит x, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ называются *взаимно простыми*.

2.4.1.4. Иррациональные выражения.

Обобщение понятия о степени. Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень. Корнем m-й степени

из x (обозначается $\sqrt[m]{x}$) называется величина y, m-я степень которой равна x: $(\sqrt[m]{x})^m = x$. При m четном $\sqrt[m]{x}$ существует (среди действительных чисел) только при $x \geqslant 0$, причем допустимы два значения корня – положительное и отрицательное. Для определенности знак корня в этом случае будем всегда брать положительным, так что $\sqrt[m]{x^m} = |x|$. При m нечетном существует единственное значение $\sqrt[m]{x}$, знак которого совпадает со знаком x.

Из определения следует, что

$$\sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}, \quad \sqrt[m]{x/y} = \sqrt[m]{x}/\sqrt[m]{y}$$

при условии, что соответствующие корни существуют.

Выражения, содержащие знак корня (радикал), называются *иррациональными*.

Примеры преобразований иррациональных выражений

1) $\sqrt{x/(2y)} = \sqrt{2xy/(4y^2)} = \sqrt{2xy}/(2|y|)$ (при $y \neq 0$, $xy \geqslant 0$);

2) $\sqrt[3]{x/(4yz^2)} = \sqrt[3]{2xy^2z/(8y^3z^3)} = \sqrt[3]{2xy^2z}/(2yz)$ (при $y \neq 0$, $z \neq 0$);

3) $1/(x + \sqrt{y}) = (x - \sqrt{y})/((x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})) = (x - \sqrt{y})/(x^2 - y)$ (при $y \geqslant 0$, $x^2 - y \neq 0$);

4) $1/(x + \sqrt[3]{y}) = (x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})/((x + \sqrt[3]{y})(x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})) = (x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})/(x^3 + y)$ (при $x^3 + y \neq 0$);

5) $\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{(x + u)/2} + \sqrt{(x - u)/2}$, где $u = \sqrt{x^2 - y}$ (при $y \geqslant 0$, $x^2 - y \geqslant 0$).

Понятие возведения в степень может быть обобщено на нулевой, отрицательные и дробные показатели при помощи формул (для допустимых значений x)

$$x^0 = 1, \ x^{-n} = 1/x^n, \ x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \ x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}.$$

Приведенные в 2.4.1.2 формулы для действий со степенями остаются в силе.

Пример. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[12]{x^7})(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x^5}) = (x^{1/2} + x^{2/3} + x^{3/4} + x^{7/12})(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4} + x^{5/12}) = x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{13/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x = x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3}$.

2.4.1.5. Неравенства. Два алгебраических выражения, соединенные одним из знаков $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, $\neq$, образуют *неравенство*. Неравенство называется *тождественным* или *универсальным*, если оно выполняется (в арифметическом смысле) для любых действительных значений входящих в неравенство величин. Неравенство называется *выполнимым*, если существует непустое множество значений входящих в неравенство величин, при подстановке которых неравенство оказывается справедливым, и *невыполнимым*, если таких значений не существует.

Примеры. Неравенство $x^2 + 1 > 0$ – тождественное; $x^2 + y^2 + 5 < 0$ – невыполнимое; $2x + 4 \geqslant 0$ – выполнимое (оно справедливо при $x \geqslant -2$).

Некоторые универсальные неравенства.

1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

2) $|a| + |b| \geqslant |a - b| \geqslant ||a| - |b||$.

3) $|(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n| \leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n}$ (равенство имеет место только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$).

4) *Неравенство Коши – Буняковского*:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha a_k = \beta b_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и некоторых α, β, $|\alpha| + |\beta| > 0$).

5) *Неравенство Минковского* (при $p \geqslant 1$):

$$(|a_1 + b_1|^p + |a_2 + b_2|^p + \ldots + |a_n + b_n|^p)^{1/p} \leqslant (|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p} + (|b_1|^p + |b_2|^p + \ldots + |b_n|^p)^{1/p}.$$

Выполнимые неравенства.

1) $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Среднее геометрическое положительных чисел меньше их среднего арифметического или равно ему (см. 2.3.1). Равенство имеет место, только если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2) *Неравенство Чебышева.* При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

3) *Обобщенные неравенства Чебышева.* При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, k натуральном

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k}{n}}.$$

При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \geqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k}{n}}.$$

Неравенства называются *эквивалентными*, если они выполнимы для одних и тех же значений входящих в них величин или если они невыполнимы.

Основные свойства неравенств (эквивалентные преобразования).

1) Если $A_1 < A_2$, то $A_2 > A_1$.

2) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 \leqslant A_1$, то $A_1 = A_2$.

3) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 \leqslant A_3$, то $A_1 \leqslant A_3$.

4) Если $A_1 < A_2$ и $A_2 \leqslant A_3$ или $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 < A_3$, то $A_1 < A_3$.

5) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_3 \leqslant A_4$, то $A_1 + A_3 \leqslant A_2 + A_4$.

6) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_3 > 0$, то $A_1 A_3 \leqslant A_2 A_3$.

7) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_3 < 0$, то $A_1 A_3 \geqslant A_2 A_3$.

8) Если $0 < A_1 \leqslant A_2$ или $A_1 \leqslant A_2 < 0$, то $1/A_1 \geqslant 1/A_2$.

Решить неравенство, содержащее неизвестную величину,— значит определить множество значений неизвестного, при которых неравенство выполнимо,— *множество решений неравенства*. Для отыскания решения используются эквивалентные преобразования.

Примеры решения неравенств.

1) $5x + 3 \leqslant 8x + 1$. Используя свойство 5), прибавим к обеим частям неравенства $-8x - 3$; получим $-3x \leqslant -2$. Используя свойства 6) и 7), получим решение $x \geqslant 2/3$.

2) Неравенство первой степени $ax + b \geqslant 0$*). При $a > 0$ имеем $x \geqslant -b/a$, при $a < 0$ имеем $x \leqslant -b/a$, а при $a = 0$ неравенство тождественно для $b \geqslant 0$ и невыполнимо для $b < 0$.

3) $x^2 \leqslant a$. При $a < 0$ неравенство невыполнимо, при $a = 0$ получаем $x = 0$, при $a > 0$ решением является множество значений, определяемое двойным неравенством $-\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.

4) $x^2 \geqslant a$. При $a \leqslant 0$ неравенство тождественно, при $a > 0$ решением является множество значений x, определяемое следующими условиями: или $x \geqslant \sqrt{a}$, или $x \leqslant -\sqrt{a}$.

5) Неравенство второй степени $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ $(a \neq 0)$ может быть преобразовано к виду $a((x + p/2)^2 + D) \geqslant 0$, где $p = b/a$, $D = (4ac - b^2)/(4a^2)$. При $D \geqslant 0$ неравенство тождественно при $a > 0$ и невыполнимо при $a < 0$. При $D < 0$, используя свойства неравенств и примеры 3) и 4), получим, обозначив $x_1 = -p/2 - \sqrt{-D}$, $x_2 = -p/2 + \sqrt{-D}$, что $x \leqslant x_1$ или $x \geqslant x_2$ при $a > 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ при $a < 0$.

2.4.1.6. Элементы теории групп. Алгебраическая система G, в которой определена одна операция, ставящая в соответствие двум любым элементам системы какой-либо третий элемент этой системы, называется *группой*, если эта операция (обозначаемая $*$) обладает следующими свойствами:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ для всех $a, b, c \in G$ — ассоциативность;

2) существует «нейтральный» элемент e такой, что $e * a = a * e = a$ для всех $a \in G$;

3) для каждого $a \in G$ существует обратный элемент x такой, что $a * x = x * a = e$.

Если, кроме того, для любых элементов a и b выполнено соотношение $a * b = b * a$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

*) Знак неравенства $\leqslant$ можно перевести в $\geqslant$ умножением неравенства на -1. Если вместо $\geqslant$ стоит $>$, то при решении возможность равенства должна быть отброшена.

В качестве знака операции обычно употребляют знак $+$ (аддитивная группа) или $\cdot$ (мультипликативная группа). Для аддитивной группы нейтральный элемент называется *нулем*, а обратный к a элемент обозначается $-a$. Для мультипликативной группы нейтральный элемент называется *единицей*, а обратный элемент обозначается a^{-1}.

Коммутативная аддитивная группа называется *кольцом*, если в ней определена, кроме операции сложения, вторая операция — *умножение*, обладающая *дистрибутивностью*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для любых элементов a, b и c.

Примером кольца может служить $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

Если операция умножения в кольце обладает свойством ассоциативности $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ или коммутативности $a \cdot b = b \cdot a$, то кольцо называется соответственно *ассоциативным* или *коммутативным*.

Если в ассоциативном и коммутативном кольце существует единичный элемент e, т. е. $a \cdot e = e \cdot a = a$ для любого a, и для каждого элемента a, отличного от нуля, существует обратный элемент a^{-1} (т. е. кольцо, из которого исключен нуль, образует мультипликативную группу), то кольцо называется *полем*. Примерами полей могут служить множество всех рациональных чисел, множество всех действительных чисел и множество всех комплексных чисел.

Отображение алгебраической системы G в другую систему G' называется *гомоморфизмом*, если каждому элементу $a \in G$ соответствует определенный элемент $a' \in G'$, причем если $c = a * b$, то $c' = a' *' b'$ ($*$ — операция, определенная в G, $*'$ — операция, определенная в G'). Если такое отображение взаимно однозначно, оно называется *изоморфизмом*.

2.4.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.4.2.1. Уравнения. Пусть G обозначает множество чисел, так называемую *основную область*, и a, b, $c, \ldots, x$, y, z — переменные. Это знаки, вместо которых могут стоять элементы основной области или ее подмножества, так называемой *основной области переменных*, или *области изменения*. Из чисел и переменных могут быть построены алгебраические выражения (см. 2.4.1), например: 8, $-3/5$, $(2x - 1)/a$ $(a \neq 0)$, $\sqrt[3]{a^2 - 1}$. Определение выражения можно распространить на неалгебраические выражения, к которым относятся, например, a^β (β действительное), e^x, $\log_a y$, $\sin x$, $\arccos z$.

Под *областью определения* X выражения с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующими областями изменения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ понимают множество всех последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, для которых данное выражение переходит в число из области G, если переменные x_i заменить на ξ_i.

Если G — множество всех действительных чисел, то выражение $(2x + 1)/5$ имеет, например, в качестве области определения всю область изменения x, в то время как область определения выражения $5/(2x + 1)$ содержит все числа области изменения x, за исключением $-1/2$.

Два выражения $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *эквивалентными* по отношению к области определения X, если соотношение $T_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = T_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ выполняется для всех последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in X$ (ср. 2.4.1.5). Переход от выражения T_1 к эквивалентному выражению T_2 называется *эквивалентным преобразованием выражений*. Это понятие зависит от областей определения выражений; так, $\sqrt{a^2} = a$ для неотрицательных действительных чисел есть эквивалентное преобразование, но не является таковым для множества всех действительных чисел.

Пример. Выражения $3x/2 + 5x/2$ и $4x$ эквивалентны по отношению к множеству всех действительных чисел, в то время как $a + b + 1$ и $a + (b^2 - 1)/(b - 1)$ не эквивалентны по отношению к этому множеству, так как выражение $a + (b^2 - 1)/(b - 1)$ не определено при $b = 1$.

Если два выражения T_1, T_2, содержащие переменные, связать знаком равенства: $T_1 = T_2$, то получается *уравнение*; T_1 и T_2 называются соответственно левой и правой частями уравнения. Если выражения T_1 и T_2 не содержат переменных, то имеется высказывание о равенстве, которое либо истинно, либо ложно. Уравнение представляет собой высказывание, которое переходит в истинное или ложное только после замены переменных их значениями.

Решение. Множество решений. Пусть $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть уравнение с n переменными, и пусть X – соответствующая область определения. Тогда каждая последовательность чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, элементы ξ_i которой, будучи подставленными вместо соответствующих переменных x_i в уравнение, переводят его в истинное высказывание, называется *решением* или *корнем* этого уравнения. Решить уравнение – значит найти все его решения, т. е. найти его множество решений.

Пример. (3, 2) есть решение уравнения $3x_1 - 2x_2 = 5$ (x_1, x_2 действительны), множество решений есть $\{((5 + 2t)/3, t);\ t$ – произвольное действительное число$\}$.

Уравнение называется *разрешимым* или *неразрешимым* в зависимости от того, имеет оно решение или нет. Если все последовательности чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in X$ являются решениями уравнения, то оно называется *тождеством относительно* X. Так, уравнение $x^2 = 2$ для рациональных x неразрешимо, а для действительных x разрешимо. Уравнение $\sqrt{a^2} = a$ есть тождество по отношению к множеству всех неотрицательных действительных чисел.

Уравнения с параметрами. Иногда в уравнении с n переменными часть переменных можно рассматривать в качестве так называемых *неизвестных* m переменных $(0 < m < n)$, а остальные – в качестве *параметров*. Тогда решения уравнения могут зависеть от параметров.

Пример. Если в уравнении $5x - 2y = z + 1$ все переменные считаются неизвестными уравнения, то это есть уравнение относительно переменных x, y и z и, например, тройка (1, 0, 4) есть решение этого уравнения. Если же z рассматривать как параметр, то получается уравнение относительно x и y, решением которого является, например, $(z + 3,\ 2z + 7)$.

Эквивалентные уравнения: Два уравнения с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащими одной и той же области изменения, называются *эквивалентными* над этой областью изменения, если их множества решений совпадают. Например, уравнения $x^2 = 4$ и $x^3 = 8$ эквивалентны над множеством натуральных чисел, но не эквивалентны над множеством целых чисел, так как в последнем случае множества решений суть $\{-2, 2\}$ и $\{2\}$ соответственно.

Уравнения, тождественные по отношению к одинаковым областям изменения, всегда эквивалентны (это справедливо и для двух неразрешимых уравнений); если два уравнения эквивалентны третьему, то они эквивалентны друг другу (*транзитивность* эквивалентности) (ср. 2.4.1.5).

2.4.2.2. Эквивалентные преобразования. *Эквивалентное преобразование* – это преобразование, которое переводит уравнение в эквивалентное. Преобразование, переводящее уравнение G_1 в уравнение G_2, эквивалентно тогда и только тогда, когда для множеств решений L_1 и L_2 уравнений G_1 и G_2 выполняется равенство $L_1 = L_2$. Если, напротив, $L_1 \neq L_2$, то преобразование называется *неэквивалентным*.

Примеры (областью изменения в дальнейшем всегда будет множество действительных чисел).

1) Преобразование уравнения G_1: $3x - 4 = 8 + 5x$ в уравнение G_2: $2x = -12$ является эквивалентным, так как $L_1 = L_2 = \{-6\}$.

2) Если уравнение $\dfrac{12 + 4x}{x + 3} = \dfrac{2x - 1}{5 - x}$ переписывают в виде $(12 + 4x)(5 - x) = (2x - 1)(x + 3)$, то производят неэквивалентное преобразование, так как $L_1 = \{7/2\} \subset \{7/2, -3\} = L_2$; в этом случае $L_1 \subset L_2$. Если в качестве области изменения брать, например, множество положительных действительных чисел, то указанное преобразование является эквивалентным, так как в этом случае $L_1 = L_2 = \{7/2\}$.

3) Еще один пример неэквивалентного преобразования подобного типа дает переход от $\sqrt{x + 7} = 2x - 1$ к $x + 7 = (2x - 1)^2$, так как $L_1 = \{2\} \subset \{2, -3/4\} = L_2$.

4) При неэквивалентных преобразованиях решения могут и теряться, т. е. $L_1 \supset L_2$. Например, если перейти от уравнения G_1: $x^3 - 4x^2 = 5x$ к уравнению G_2: $x^2 - 4x - 5 = 0$, то получим $L_1 = \{-1, 0, 5\} \supset L_2 = \{-1, 5\}$.

Теоремы об эквивалентных преобразованиях уравнений (ср. 2.4.1.5).

1. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнению $T'_1 = T'_2$, если T_1 эквивалентно T'_1 и T_2 эквивалентно T'_2.

2. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнению $T_2 = T_1$.

3. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнениям $T_1 + T_3 = T_2 + T_3$ и $T_1 - T_3 = T_2 - T_3$, если T_3 есть выражение, определенное во всей области определения уравнения $T_1 = T_2$.

4. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнениям $T_1 T_3 = T_2 T_3$ и $T_1 : T_3 = T_2 : T_3$, если T_3 определено и отлично от нуля во всей области определения уравнения $T_1 = T_2$.

Чтобы решить уравнение, т. е. чтобы определить множество его решений, в общем случае посредством эквивалентных преобразований составляют цепочку уравнений: первое есть заданное уравнение, а последнее – уравнение такой простой структуры, что его решение можно найти непосредственно. По построению каждые два соседних уравнения цепочки эквивалентны друг другу; вслед-

ствие транзитивности эквивалентности все уравнения цепочки эквивалентны друг другу; в частности, исходное уравнение эквивалентно последнему уравнению. Следовательно, найдя множество решений последнего уравнения, мы находим также множество решений исходного уравнения.

Примеры. 1) $\frac{5}{x}+\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x+2}$ (x – действительное);

2) $5(x+2)(2-x)+2x(x+2)=3x(2-x)$;

3) $-5x^2+20+2x^2+4x=6x-3x^2$;

4) $20=2x$; 5) $x=10$.

Проделанные преобразования эквивалентны для всех $x \neq -2, 0, 2$. Следовательно, искомое множество решений имеет вид $L_1=L_5=\{10\}$.

2.4.2.3. Алгебраические уравнения.

Общее понятие. Каноническая форма. Любое уравнение $P(x_1,\ldots,x_n)=0$, где $P(x_1,\ldots,x_n)$ есть многочлен (отличный от нулевого) относительно $x_1,\ldots,x_n$, называется *алгебраическим уравнением* относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$. Коэффициенты многочлена могут при этом быть как постоянными, так и параметрами (т. е. переменными, отличными от $x_1,\ldots,x_n$) или функциями таких параметров.

В соответствии со сказанным, например, $3x^2-x+5=0$, $\pi x-1=0$ – алгебраические уравнения относительно x, а $x^2+2y^2-xy-3=0$ – алгебраическое уравнение относительно x и y. Уравнение $y^3-y\sin x-2\sin^2 x-7=0$ не является алгебраическим относительно x и y, но если x рассматривается как параметр, то и это уравнение будет алгебраическим относительно y.

Неалгебраическими уравнениями являются, например,

$$\sqrt{4x-7}+5=1-2x^3,\quad \frac{x-5}{x^2-8x+15}=\frac{1}{x-3},\quad \sin x-e^x+5=0.$$

Среди неалгебраических уравнений те уравнения, в которые переменные, рассматриваемые как неизвестные, входят под знаками трансцендентных функций (см. 2.5.2), называются *трансцендентными уравнениями* (см. 2.4.3).

Иногда неалгебраические уравнения можно преобразовать в алгебраические (не обязательно эквивалентные исходным).

Примеры. Уравнение $\frac{4}{x}=\frac{2x-1}{5-x}$ эквивалентно алгебраическому уравнению $2x^2+3x-20=0$.

Уравнение $\frac{x-5}{x^2-8x+15}=\frac{1}{x-3}$ никакому алгебраическому уравнению не эквивалентно; оно выполнено для всех x, кроме $x=3$ и $x=5$.

Уравнение $7-x=\sqrt{x-1}$ можно преобразовать в алгебраическое уравнение $x^2-15x+50=0$, но это уравнение не эквивалентно исходному. Алгебраическое уравнение имеет множество решений $\{5, 10\}$, в то время как исходное уравнение выполняется только при $x=5$.

Всякое *алгебраическое уравнение* относительно x можно записать в виде

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0;$$

$$A_0\neq 0,\ n\geqslant 1;$$

A_i называются *коэффициентами* уравнения, n – его *степенью*.

Если все коэффициенты A_i являются параметрами, то уравнение называется *общим алгебраическим уравнением относительно x степени n*.

Если алгебраическое уравнение разделить на $A_0\neq 0$, то, обозначая $A_i/A_0=a_i$ ($i=1, 2,\ldots,n$), получим *каноническую* форму алгебраического уравнения n-й степени относительно x:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

Корни алгебраических уравнений *до четвертой степени включительно* выражаются через коэффициенты при помощи конечного числа алгебраических операций. В этом случае каждое решение выражается в радикалах, т. е. представляет собой выражение, содержащее только знаки арифметических операций и извлечения корней; показатели этих корней – целые числа $p\geqslant 2$, а подкоренные выражения суть рациональные функции коэффициентов или сами содержат радикалы.

Алгоритмы решения алгебраических уравнений с одним неизвестным. *Линейные уравнения* (уравнения 1-й степени). Каждое линейное уравнение есть алгебраическое уравнение 1-й степени, т. е. неизвестное встречается только в 1-й степени. Существуют также уравнения, эквивалентные линейному.

Например, уравнение $(x-1)(x+3)=(x+8)(x-2)$ над множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел эквивалентно линейному уравнению $4x-13=0$. Уравнение [illegible] $=\frac{3}{x-1}$ над множеством $\mathbb{R}\setminus\{1, 3, 5\}$ эквивалентно линейному уравнению $x-13=0$. Иррациональное уравнение $\sqrt[3]{x+2}=1$ над множеством всех действительных чисел эквивалентно уравнению $x+1=0$.

Линейное уравнение с одним неизвестным x и областью изменения $\mathbb{R}$ имеет вид $ax+b=0$, $a\neq 0$, ax – линейный член, b – свободный член. Это уравнение имеет одно решение: $x=-b/a$. При изменении множества, над которым определяется решение, изменяется и разрешимость уравнения. Так, уравнение $2x+5=0$ неразрешимо над множеством натуральных чисел.

Квадратные уравнения (уравнения 2-й степени). Каждое алгебраическое уравнение 2-й степени называется *квадратным уравнением*. Квадратное уравнение относительно x с областью изменения $\mathbb{R}$ (или множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$) имеет вид

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$$

где ax^2 – квадратный, bx – линейный и c – свободный члены. После деления на a получаем каноническую форму: $x^2+px+q=0$, где $p=b/a$, $q=c/a$ – действительные параметры.

Число действительных решений квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ зависит от знака *дискриминанта* $D=q-(p/2)^2$:

если $D<0$, то имеется два решения (два действительных корня);

если $D=0$, то имеется одно решение (два действительных совпадающих корня);

если $D>0$, то нет действительных решений (два комплексных корня).

Если в качестве области изменения неизвестного взять множество комплексных чисел, то квадратное уравнение всегда имеет два решения: действительные – в случае $D\leqslant 0$ и комплексно сопряженные – в случае $D>0$.

Вследствие того, что $4ac - b^2 = 4a^2D$, в качестве дискриминанта можно использовать выражение $\Delta = 4ac - b^2$, знак которого определяет вид решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение квадратного уравнения.

1-й способ. *Применение формулы.*

а) Для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

б) Для уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ имеем

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q} = -p/2 \pm \sqrt{-D}.$$

Эти формулы справедливы всегда, если в качестве области изменения неизвестного выбрано множество комплексных чисел. Если область изменения есть множество действительных чисел, то надо потребовать еще, чтобы выполнялось неравенство $D \leqslant 0$ (или $\Delta \leqslant 0$).

2-й способ. *Разложение на линейные множители.* В случае, если удается разложить квадратный трехчлен на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ (или $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$), уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (или $x^2 + px + q = 0$) имеет множество решений $L = \{\alpha, \beta\}$.

Кубические уравнения (уравнения 3-й степени). Уравнение 3-й степени, или кубическое уравнение, имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ a \neq 0,$$

где a, b, c, d – действительные, при этом ax^3 – кубический, bx^2 – квадратный, cx – линейный и d – свободный члены. После деления на a уравнение принимает канонический вид:

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0, \qquad (*)$$

где $r = b/a$, $s = c/a$, $t = d/a$.

Делая в уравнении $(*)$ замену неизвестного $y = x + (r/3)$ $(x = y - (r/3))$, получаем так называемое *приведенное уравнение*:

$$y^3 + py + q = 0,$$

где $p = \dfrac{3s - r^2}{3}$, $q = \dfrac{2r^3}{27} - \dfrac{rs}{3} + t$.

Число действительных решений кубического уравнения зависит от знака *дискриминанта* $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$ (эта величина получается умножением на $(-1/108)$ дискриминанта, введенного в 1.2.1.1):

	x действительное	x комплексное
$D>0$	Одно действительное решение	Одно действительное и два комплексно сопряженных решения
$D<0$	Три действительных решения	Три действительных решения
$D=0$	Одно действительное решение и одно действительное двукратное решение или одно действительное трехкратное решение (последнее в случае $p=q=0$)	Одно действительное решение и одно действительное двукратное решение или одно действительное трехкратное решение (последнее в случае $p=q=0$)

Решение кубического уравнения.

1-й способ. *Разложение левой части на линейные множители.* Если удается найти разложение $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, то уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет множество решений $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Достаточно найти разложение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x^2 + \rho x + \sigma)$ (выделение линейного множителя); тогда одно решение есть $x_1 = \alpha$, а два других находятся путем решения квадратного уравнения $x^2 + \rho x + \sigma = 0$. Очевидно, выделение линейного множителя всегда возможно, если известно одно решение уравнения или это решение можно подобрать (см. 2.4.2.4).

2-й способ. *Применение формулы Кардано.* Формула Кардано для кубического уравнения $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ относится к его приведенному виду $y^3 + py + q = 0$. В этом случае

$$y_1 = u + v,$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} i\sqrt{3} = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v,$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} i\sqrt{3} = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{D}}, \qquad v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{D}},$$

$$D = (p/3)^3 + (q/2)^2, \qquad \varepsilon_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2.$$

Посредством замены $x_k = y_k - (r/3)$ $(k = 1, 2, 3)$ из y_k получим решения x_k данного кубического уравнения.

В случае $D < 0$ кубическое уравнение имеет три действительных решения. Если применять приведенные выше формулы, то корни будут выражаться через комплексные величины. Избежать этого можно следующим образом (см. также 3-й способ). Положим $\rho = \sqrt{-p^3/27}$, $\cos\varphi = -q/(2\rho)$. Тогда решениями приведенного уравнения $y^3 + py + q = 0$ будут

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3),$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3 + 2\pi/3),$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3 + 4\pi/3),$$

от которых заменой $x_k = y_k - (r/3)$ снова можно перейти к решениям заданного кубического уравнения $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$.

Пример. Кубическое уравнение $x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$ заменой $x = y + 2$ преобразуем к приведенному виду $y^3 + 9y - 26 = 0$ (здесь $p = 9$, $q = -26$, $D = 27 + 169 = 196$). Применение формулы Кардано дает $y_1 = 2$, $y_2 = -1 + 2i\sqrt{3}$, $y_3 = -1 - 2i\sqrt{3}$; следовательно, $x_1 = 4$, $x_2 = 1 + 2i\sqrt{3}$, $x_3 = 1 - 2i\sqrt{3}$.

3-й способ. *Применение вспомогательных величин, которые могут быть вычислены при помощи таблиц.* В приведенном уравнении $y^3 + py + q = 0$ положим $R = (\operatorname{sign} q)\sqrt{|p|/3}$. Вспомогательная величина φ и при ее помощи корни y_1, y_2, y_3 определяются в зависимости от знаков p и $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$ из таблицы:

	$p<0$		$p>0$
	$D<0$	$D>0$	
	$\cos\varphi = \frac{q}{2R^3}$	$\operatorname{ch}\varphi = \frac{q}{2R^3}$	$\operatorname{sh}\varphi = \frac{q}{2R^3}$
y_1	$-2R\cos\frac{\varphi}{3}$	$-2R\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$	$-2R\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$
y_2	$-2R\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$	$R\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}+i\sqrt{3}R\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$	$R\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}+i\sqrt{3}R\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$
y_3	$-2R\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$	$R\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}R\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$	$R\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}R\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$

Пример. $y^3 - 9y + 4 = 0$, $p = -9$, $q = 4$, $D = -23 < 0$, $R = \sqrt{3} = 1{,}7321$, $\cos\varphi = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849$, $\varphi = 67°22'$.

$$y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}4641\cdot 0{,}9242 = -3{,}201,$$

$$y_2 = -2\sqrt{3}\cos 142°27' = (-3{,}4641)\cdot(-0{,}7929) = 2{,}747,$$

$$y_3 = -2\sqrt{3}\cos 262°27' = (-3{,}4641)\cdot(-0{,}1314) = 0{,}455.$$

Приближенное решение уравнения см. 7.1.2.3.
Уравнение 4-й степени имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,\ a \neq 0,$$

где a, b, c, d, e — действительные; посредством замены $y = x + b/(4a)$ данное уравнение переводим в *приведенное уравнение*

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

где p, q и r — рациональные функции коэффициентов a, b, c, d, e.

Вид решения этого уравнения зависит от вида решения его *кубической резольвенты*

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Если область изменения неизвестного есть множество **C** комплексных чисел, то имеет место следующее:

Решение уравнения 4-й степени.

1-й способ. ***Разложение на линейные множители.*** **Если удается произвести разложение многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-\alpha)\times(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$, то уравнение**

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

имеет множество решений $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Достаточно найти разложение левой части уравнения 4-й степени в произведение двух квадратных трехчленов: тогда решение уравнения 4-й степени сводится к решению двух квадратных уравнений.

2-й способ. Если z_1, z_2, z_3 — корни кубической резольвенты, то

$$y_1 = (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_2 = (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_3 = (-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_4 = (-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2$$

суть решения приведенного уравнения $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ (при этом знаки перед радикалами $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ выбирают так, чтобы выполнялось равенство $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q$). Далее посредством замены $x = y - b/(4a)$ находят решения исходного уравнения 4-й степени.

Пример. Уравнение $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ имеет кубическую резольвенту $z^3 - 50z^2 + 769z - 3600 = 0$ с решениями $z_1 = 9$, $z_2 = 16$, $z_3 = 25$; для того чтобы $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -60$, знаки перед всеми корнями надо взять, например, отрицательными, т. е. $\sqrt{z_1} = -3$, $\sqrt{z_2} = -4$, $\sqrt{z_3} = -5$. Отсюда получим корни исходного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -6$.

3-й способ. Если в уравнении

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Кубическая резольвента	Уравнение 4-й степени
Все корни действительны и положительны*)	Четыре действительных корня
Все корни действительны, из них один положительный и два отрицательных*)	Две пары комплексно сопряженных корней
Один действительный корень и два комплексно сопряженных корня	Два действительных корня и два комплексно сопряженных корня

*) Согласно теореме Виета, произведение корней z_1, z_2, z_3, равное q^2, должно быть всегда положительным ($q \neq 0$).

выполняется равенство $b = d = 0$, то мы имеем так называемое *биквадратное уравнение* $ax^4+cx^2+e=0$. Посредством замены переменного $x^2=t$ это уравнение переводится в квадратное уравнение $at^2+ct+e=0$. Из решений t_1, t_2 этого уравнения, полагая $x^2=t$, получают корни исходного уравнения 4-й степени.

Если коэффициенты уравнения $x^4+rx^3+sx^2+$ $+tx+u=0$ удовлетворяют соотношению $r^3+8t=$ $=4rs$, то уравнение 4-й степени может быть решено при помощи квадратного уравнения: $x^4+rx^3+sx^2+tx+u=\left(x^2+\frac{rx}{2}\right)^2+\left(s-\frac{r^2}{4}\right)\times$ $\times\left(x^2+\frac{rx}{2}\right)+u=0$. После замены $x^2+\frac{rx}{2}=t$ заданное уравнение 4-й степени переходит в уравнение $t^2+\left(s-\frac{r^2}{4}\right)t+u=0$, решая которое, получаем затем решения исходного уравнения.

Приближенное решение уравнения см. 7.1.2.3.

Уравнения высших степеней. Уравнения 5-й и более высоких степеней в общем случае принципиально неразрешимы в радикалах. Чаще всего их решают приближенными методами (см. 7.1.2.3). Если можно подобрать решение x_1, то выделением линейного множителя $(x-x_1)$ решение заданного уравнения сводится к решению уравнения меньшей степени.

Частные виды уравнений высших степеней. m решений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *двучленного уравнения* $x^m=a$ ($m>1$ целое, a положительное) получают при помощи формулы Муавра (см. 3.4.2.5) в виде

$$x_{k+1}=\sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Уравнение $x^{2m}+ax^m+b=0$ заменой переменного $x^m=y$ переводится в квадратное уравнение $y^2+ay+b=0$. Если оно имеет решения y_1, y_2, то при помощи двучленных уравнений $x^m=y_1$ или $x^m=y_2$ находят корни исходного уравнения.

2.4.2.4. Общие теоремы. Если x_1 – корень уравнения

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

то многочлен $P_n(x)$, стоящий в левой части уравнения, делится на $(x-x_1)$ без остатка и получаемое частное есть многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$:

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x).$$

В общем случае остаток от деления $P_n(x)$ на $(x-x_1)$ равен $P_n(x_1)$:

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)+P_n(x_1).$$

Если $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-x_1)^k$, но уже не делится на $(x-x_1)^{k+1}$, то x_1 называется *k-кратным корнем* уравнения $P_n(x)=0$ (корнем *кратности* k). В этом случае x_1 есть общий корень полинома $P_n(x)$ и его производных вплоть до $(k-1)$-го порядка.

Основная теорема алгебры. Каждое алгебраическое уравнение n-й степени

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

коэффициенты которого a_i $(i=1,\ldots,n)$ – действительные или комплексные числа, имеет ровно n корней, действительных или комплексных, если k-кратный корень считать за k корней.

Если корни многочлена $P_n(x)$ равны $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и кратности их равны соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=n\right)$, то многочлен *представим в виде произведения:*

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_r)^{\alpha_r},$$

и соответствующее уравнение имеет вид

$$(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_r)^{\alpha_r}=0.$$

Решение уравнения $P_n(x)=0$ можно упростить путем перехода к уравнению, имеющему те же самые корни, что и $P_n(x)=0$, но уже однократные (простые). Так как кратные корни многочлена $P_n(x)$ являются также корнями производной $P_n'(x)$, то определяют наибольший общий делитель $T(x)$ многочленов $P_n(x)$ и $P_n'(x)$. Тогда уравнение $Q(x)=0$, где $Q(x)=P_n(x)/T(x)$, имеет те же самые корни, что и $P_n(x)=0$, но каждый из них имеет кратность 1.

Уравнение с действительными коэффициентами. Если уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_1=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq0)$, то оно имеет также корень $\bar{x}_1=\alpha-i\beta$ и притом той же кратности, что x_1. Поэтому число строго комплексных корней уравнения с действительными коэффициентами всегда четно. Следовательно, уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

В разложении на множители левой части уравнения $P_n(x)=0$ с действительными коэффициентами наряду с множителем $(x-x_\gamma)^\beta$, где x_γ – комплексный корень, имеется также и множитель $(x-\bar{x}_\gamma)^\beta$. Объединив каждую такую пару множителей, получим разложение левой части на *действительные* множители:

$$P_n(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots$$
$$\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l},$$

$$n=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{l}\beta_j.$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – действительные корни уравнения, а l пар комплексно сопряженных решений – корни квадратных множителей $x^2+p_ix+q_i$ $(i=1, 2, \ldots, l)$. Отсюда следует, что $(p_i/2)^2-q_i<0$. Так как каждый из квадратных множителей $x^2+p_ix+q_i$ положителен при любых действительных значениях x, то справедливо следующее утверждение: если уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ не имеет действительных корней, то при любых x левая часть имеет знак коэффициента a_0. Из этого следует утверждение: если в уравнении четной степени $a_n/a_0<0$, то уравнение имеет по меньшей мере два действительных корня разного знака.

Теорема Виета. Для уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

имеет место следующая зависимость между корнями уравнения (с учетом кратности) и его коэффициентами a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_ix_j = a_2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j,k\\ i<j<k}}^{n} x_ix_jx_k = -a_3,$$

. . . .

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Таким образом, если уравнение имеет целочисленные коэффициенты и целочисленное решение, то это решение является делителем свободного члена.

Теорема Виета для квадратного и кубического уравнений.

$$x^2 + px + q = 0: \qquad x^3 + rx^2 + sx + t = 0:$$

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = -r,$$

$$x_1x_2 = q, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = s,$$

$$x_1x_2x_3 = -t.$$

Теорема Штурма. При помощи теоремы Штурма можно определить число действительных корней уравнения с действительными коэффициентами. Прежде чем сформулировать теорему Штурма, опишем используемый здесь алгоритм. Отделим кратные корни заданного уравнения $P(x) = 0$, т. е. перейдем к уравнению $Q(x) = 0$, которое имеет те же корни, что и данное, но кратности 1. (Напомним, что $Q(x) = P(x)/T(x)$, где $T(x)$ – наибольший общий делитель $P(x)$ и $P'(x)$.) Затем составим последовательность $Q(x)$, $Q'(x)$, $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ следующим образом (*алгоритм Евклида*):

$$Q(x) = R_1(x)Q'(x) - Q_1(x),$$

$$Q'(x) = R_2(x)Q_1(x) - Q_2(x),$$

$$Q_1(x) = R_3(x)Q_2(x) - Q_3(x),$$

. . . .

$$Q_{m-2}(x) = R_m(x)Q_{m-1}(x) - Q_m(x),$$

$$Q_{m-1}(x) = R_{m+1}(x)Q_m(x)$$

(деление с остатком); Q_i – остатки от деления, взятые с противоположным знаком (см. 2.4.1.3). Так как в последовательности $Q(x)$, $Q'(x)$, $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ степени многочленов монотонно уменьшаются, то процесс деления оборвется после конечного числа шагов. Как известно, посредством такого деления с остатком отыскивается наибольший общий делитель исходных многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$. Но так как по предположению $Q(x)$ имеет только простые корни, то наибольший общий делитель $Q_m(x)$ многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ есть постоянная.

Положив в многочленах $x = \xi$ (ξ – действительное число), получим последовательность действительных чисел $Q(\xi)$, $Q'(\xi)$, $Q_1(\xi), \ldots, Q_m(\xi)$. Если в этой последовательности два соседних числа имеют различные знаки, то говорят о перемене знака. Пусть $w(\xi)$ означает число перемен знака, причем если некоторые из чисел $Q_i(\xi)$ – нули, то при подсчете числа перемен знаков их пропускают.

Теорема Штурма утверждает: если a и b $(a < b)$ не являются корнями $Q(x)$, то разность $w(a) - w(b)$ равна числу действительных корней $Q(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Чтобы найти число всех действительных корней уравнения, нужно найти промежуток, содержащий все корни, и применить к нему теорему Штурма. Для этого служит

Правило Ньютона. Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

$$a_0 > 0,$$

– уравнение n-й степени. Число g такое, что $P(x) > 0$, $P'(x) > 0, \ldots, P^{(n-1)}(x) > 0$ для всех $x > g$, есть верхняя граница действительных корней уравнения $P(x) = 0$. Число h есть нижняя граница действительных корней этого уравнения, если $(-h)$ есть верхняя граница действительных корней уравнения $P(-x) = 0$.

Пример. Найти число действительных корней уравнения $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$. Имеем

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \quad P'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$P''(x) = 12x^2 - 10, \quad P'''(x) = 24x.$$

Заметим, что $P'''(x) > 0$ для всех $x > g$, если $g \geqslant 0$. Далее, $P''(x) > 0$ и $P'(x) > 0$ для $g \geqslant 1$, но $P(1) < 0$. Так как $P(x) > 0$ при $x > 2$, то $g = 2$ есть верхняя граница всех действительных корней этого уравнения. Если этот метод применить к $P(-x) = x^4 - 5x^2 - 8x - 8$, то в качестве верхней границы получим 3, т. е. $h = -3$ есть нижняя граница всех действительных корней заданного уравнения. Следовательно, все действительные корни данного уравнения лежат в промежутке $[-3, 2]$; определим их число при помощи теоремы Штурма. Прежде всего заметим, что $P(x)$ не имеет кратных корней. Вычислим многочлены

$$P(x) = Q(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8,$$

$$P'(x) = Q'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$Q_1(x) = 5x^2 - 12x + 16,$$

$$Q_2(x) = -3x + 284,$$

$$Q_3(x) = -1.$$

Так как в дальнейшем важен только знак этих многочленов, то для упрощения вычисления остатков Q_i делимое или делитель можно умножать на любой положительный множитель. При $x = -3$ получаем последовательность 4, -70, 97, 293, -1; при $x = 2$ – последовательность 4, 20, 12, 278, -1. Таким образом, $w(-3) = 3$, $w(2) = 1$, и уравнение имеет $w(-3) - w(2) = 2$ действительных корня. Если вычислить еще, например, $w(0) = 2$, то мы найдем, что один корень находится в интервале $(-3, 0)$, другой – в интервале $(0, 2)$.

Правило знаков Декарта. Число положительных корней (подсчитанное с учетом их кратности) уравнения

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

не больше числа перемен знака в последова-

тельности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициентов $P(x)$ и может отличаться от него лишь на четное число. Если уравнение имеет только действительные корни, то число его положительных корней равно числу перемен знака в ряду коэффициентов.

Пример. Коэффициенты уравнения $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$ имеют знаки $+ \ + \ - \ + \ -$, т. е. знак изменяется трижды. Согласно правилу Декарта, это уравнение имеет или три, или один положительный корень. Так как при замене x на $-x$ корни уравнения меняют знаки, а при замене x на $x + h$ их величины изменяются на h, то при помощи правила Декарта можно оценить число отрицательных корней, а также число корней, бо́льших h. В нашем примере заменой x на $-x$ получим, что $x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$, т. е. уравнение имеет один отрицательный корень. Замена x на $x + 1$ дает уравнение $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$, т. е. все положительные корни нашего уравнения (число которых один или три) меньше 1.

В частности, каждое уравнение четной степени, первый и последний коэффициенты которого имеют различные знаки, имеет по меньшей мере один положительный и один отрицательный корни. Каждое уравнение нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень того же знака, что и $(-a_n/a_0)$; число его действительных корней другого знака – четное число (или нуль).

Правило Декарта позволяет также оценить число действительных корней уравнения $P(x) = 0$ в промежутке $[a, b]$. Для этого надо применить правило знаков приведенным выше способом к уравнению $P(y) = 0$, где $y = (a - x)/(x - b)$.

2.4.2.5. Система алгебраических уравнений. Если заданы m уравнений с n неизвестными и требуется найти последовательности из n чисел, которые одновременно удовлетворяют каждому из m уравнений, то мы имеем *систему уравнений*. Если все m уравнений линейны, то говорят о *системе линейных уравнений*; такие системы могут решаться методами линейной алгебры (см. 2.4.4.3). Проиллюстрируем на примерах методы решения для некоторых часто встречающихся типов нелинейных систем уравнений.

Примеры. 1) Даны уравнение 1-й степени и уравнение 2-й степени, каждое с двумя неизвестными:

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = 4,$$
$$x + 2y = 5.$$

Линейное уравнение решается относительно одного из двух неизвестных ($x = 5 - 2y$) и полученное выражение подставляется в квадратное уравнение. Получаем квадратное уравнение относительно одного неизвестного $y^2 - \frac{28}{5}y + \frac{36}{5} = 0$, которое решается, как обычно: $y_1 = 2$, $y_2 = 18/5$. Получаем множество решений заданной системы уравнений: $L = \{(1, 2); (-11/5, 18/5)\}$.

2) Даны два уравнения 2-й степени с двумя неизвестными:

$$x^2 + y^2 = 5,$$
$$xy = 2.$$

Так как $y = 2/x$, то из первого уравнения получаем биквадратное уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, которое посредством замены $x^2 = t$ переводим в квадратное уравнение относительно t. Из множества решений квадратного уравнения $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ находим корни биквадратного уравнения, а затем (вспомнив, что $y = 2/x$) и множество решений исходной системы уравнений:

$$L = \{(1, 2); (-1, -2); (2, 1); (-2, -1)\}.$$

3) Даны два уравнения 2-й степени с двумя неизвестными:

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = 17,$$
$$x^2 + y^2 + x - y = 12.$$

Вычитанием уравнений получим, что $2x - y = 5$. Если от заданной системы уравнений перейти к эквивалентной, содержащей любое из исходных уравнений и полученное линейное уравнение, то будем иметь случай, рассмотренный в примере 1). Для исходной системы уравнений получаем множество решений $\{(3, 1); (6/5, 13/3)\}$.

4) На плоскости xOy требуется найти уравнение окружности, проходящей через три точки, например (26, 4), (9, 21), (17, 17); получаем три уравнения 2-й степени с тремя неизвестными:

$$(26 - c)^2 + (4 - d)^2 = r^2,$$
$$(9 - c)^2 + (21 - d)^2 = r^2,$$
$$(17 - c)^2 + (17 - d)^2 = r^2,$$

где c, d – неизвестные координаты центра, r – неизвестный радиус. Взяв любые два из этих уравнений и вычитая одно из другого, получим линейное уравнение с двумя неизвестными. Вычитание второго уравнения из первого дает $-c + d + 5 = 0$, вычитание третьего из первого дает $-9c + 13d + 57 = 0$. Полученная система имеет решение $c = 2$, $d = -3$. Подставив эти значения в одно из исходных уравнений, получим $r = 25$.

2.4.3. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общее понятие. Примеры. Уравнение, в котором неизвестное входит в аргумент трансцендентных функций, называется *трансцендентным уравнением* (см. 2.4.2.3). К трансцендентным уравнениям принадлежат показательные уравнения, логарифмические уравнения и тригонометрические уравнения. В общем случае трансцендентные уравнения могут быть решены только при помощи приближенных методов. В некоторых особых случаях трансцендентные уравнения можно все же свести к алгебраическим уравнениям.

Показательные уравнения (приводимые к алгебраическим).

1. Неизвестное находится только в показателях степеней выражений, над которыми не производится операций сложения и вычитания. Тогда логарифмирование общего уравнения (с произвольным основанием) приводит к цели.

Пример. $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $\quad x \log 3 = (x - 2)\log 4 + x \log 2$, откуда

$$x = \frac{2\log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2} = \frac{\log 16}{\log(8/3)}.$$

2. Неизвестное x входит только в показатели степени выражений, основания которых являются целыми степенями одного и того же числа k. Тогда заменой неизвестного $y = k^x$ можно получить уравнение, алгебраическое относительно y.

Пример. $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$. Основания выражений, содержащих x, суть целые степени 2; заменой неизвестного $y = 2^x$ переводим исходное уравнение в уравнение $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$ с решениями $y_1 = 8$, $y_2 = -4$, $y_3 = 0$. Отсюда получаем, что $x_1 = 3$; других действительных корней не существует.

Трансцендентные уравнения, содержащие неизвестное только в аргументе гиперболических функций, можно привести к уравнениям рассмотренного вида, если гиперболические функции выразить через показательные.

Пример. $3\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$, $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 3$, $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$. Заменой переменного $y = e^x$ получим уравнение $y^2 - 9y + 2 = 0$, алгебраическое относительно y, с решениями $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$, откуда следует, что $x_1 = \ln y_1 \approx 2{,}1716$ и $x_2 = \ln y_2 \approx -1{,}4784$.

Логарифмические уравнения (приводимые к алгебраическим).

1. Пусть неизвестное x входит только в аргумент логарифма или уравнение содержит логарифмы от одного и того же выражения $A(x)$, где $A(x)$ – многочлен. Тогда замена переменного вида $y = \log_b A(x)$ приводит к алгебраическому относительно y уравнению. Из решений этого уравнения получаем решения исходного уравнения при помощи таблицы логарифмов.

Пример. $4 - \lg\left(\frac{5}{2}x\right) = 3\sqrt{\lg\left(\frac{5}{2}x\right)}$. Полагая $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5}{2}x\right)}$, получаем $4 - y^2 = 3y$ с множеством решений $\{1, -4\}$. Из $1 = \sqrt{\lg\left(\frac{5}{2}x\right)}$ следует $\frac{5}{2}x = 10$, т. е. $x = 4$; решение $y_2 = -4$ для исходного уравнения – постороннее.

2. Пусть неизвестное x входит только в аргумент логарифмов одного и того же основания a, и все уравнение есть линейная комбинация выражений вида $m_i \log_a P_i(x)$ (m_i – рациональные числа, P_i – многочлены относительно x). Тогда уравнение можно привести к виду $\log_a Q(x) = A$, где $Q(x)$ – многочлен, или, потенцируя, к алгебраическому уравнению $Q(x) - a^A = 0$.

Пример. $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, $\log_5 \frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 0 = \log_5 1$, $\frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что $L = \{2\}$ есть множество решений исходного уравнения.

3. Пусть неизвестное x входит только в аргумент логарифма, и уравнение содержит только логарифмы с одним и тем же аргументом, но с различными основаниями. Тогда в некоторых случаях уравнение можно решить после приведения логарифмов к одному основанию и использования свойств логарифмов.

Пример. $\log_2(x-1) + \log_3(x-1) + \log_4(x-1) = 3 + \log_3 4$, $\frac{\log_4(x-1)}{\log_4 2} + \frac{\log_4(x-1)}{\log_4 3} + \log_4(x-1) = 3 + \log_3 4$, $\log_4(x-1)(\log_2 4 + \log_3 4 + 1) = 3 + \log_3 4$, $\log_4(x-1) = 1$, $x = 5$.

Тригонометрические уравнения (приводимые к алгебраическим). Пусть неизвестное x или $nx + a$ (n – целое) входит только в аргументы тригонометрических функций. Тогда, применяя тригонометрические формулы, приводим уравнение к виду, содержащему лишь одну тригонометрическую функцию аргумента x. Эту функцию полагаем равной y и решаем алгебраическое относительно y уравнение. Решив его, определяем (в общем случае при помощи таблиц) неизвестное x. При этом, ввиду периодичности тригонометрических функций, следует принимать во внимание многозначность решения. При переходе от данного уравнения к уравнению, содержащему только одну тригонометрическую функцию относительно x, иногда бывают необходимы неэквивалентные преобразования (например, возведение в квадрат при наличии радикалов). Поэтому необходимо сделать проверку, чтобы исключить появившиеся посторонние решения.

Пример. $4\sin x = 4\cos^2 x - 1$; $4\sin x = 4(1 - \sin^2 x) - 1$; после замены переменной $y = \sin x$ получим $4y^2 + 4y - 3 = 0$ с решениями $y_1 = 1/2$, $y_2 = -3/2$. Решение y_2 не дает действительных решений заданного уравнения ($|\sin x| \leqslant 1$); y_1 дает $x = \pi/6 + 2k\pi$ и $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

2.4.4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.4.4.1. Векторные пространства.

2.4.4.1.1. Понятие векторного пространства. Непустое множество V, для элементов которого определено сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$ на действительные числа, называется действительным *векторным пространством* $V = [V, +, \cdot]$ или *линейным пространством**), а элементы V называются *векторами*, если выполнены следующие аксиомы:

1) Для любых двух элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ существует один элемент $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ – сумма $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (внутренний закон композиции).

2) *Ассоциативность*. Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V$ справедливо равенство $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

3) *Коммутативность*. Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

4) Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ существует $\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5) Для любого $\mathbf{a} \in V$ и любого действительного числа α имеется элемент $\alpha \cdot \mathbf{a} \in V$ – произведение элемента $\mathbf{a}$ на число α (внешний закон композиции)**).

6) *Ассоциативность*. Для любого $\mathbf{a} \in V$ и любых действительных чисел α, β справедливо равенство $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$.

7) Для любого $\mathbf{a} \in V$ справедливо равенство $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

8) *Дистрибутивность*. Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ и любых действительных чисел α, β справедливы равенства $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ и $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Замечание. При определении умножения вместо поля действительных чисел можно положить в основу другие поля K. Тогда говорят о *векторном пространстве над полем* K; в частности, о «действительном векторном пространстве» или о «комплексном векторном пространстве», если K есть соответственно поле действительных или поле комплексных чисел.

Примеры. 1) Векторное пространство упорядоченных пар (x, y) действительных чисел x, y с законами композиции

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

*) Векторными пространствами иногда называются только линейные пространства, имеющие конечный базис (см. 2.4.4.1.4).

**) Элемент $\alpha \cdot \mathbf{a}$ обычно обозначается $\alpha\mathbf{a}$.

2) Векторное пространство конечных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел с законами композиции

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

3) Векторное пространство многочленов $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ с законами композиции

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i \quad (n \geqslant m),$$
$$\alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i.$$

4) Векторное пространство функций, непрерывных на замкнутом отрезке, с законами композиции $[f+g](x) = f(x) + g(x)$, $[\alpha f](x) = \alpha \cdot f(x)$.

5) Векторное пространство геометрических векторов на плоскости, причем сложение и умножение на действительное число определены обычным образом (см. 4.2.1).

Правила действий с элементами векторных пространств. Из аксиом 1)–8) следует, что действия с элементами векторного пространства производятся, в сущности, так же, как и с числами; по отношению к сложению и умножению на действительные числа справедливы, грубо говоря, «обычные» правила, в частности:

1) Существует, и притом только один, *нейтральный* по отношению к сложению элемент $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ для любых $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{0}$ называется *нулевым вектором*.

2) Для каждого вектора $\mathbf{a} \in V$ существует единственный *обратный* по отношению к сложению элемент $(-\mathbf{a}) \in V$ такой, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$; вектор $(-\mathbf{a})$ называется *противоположным* вектору $\mathbf{a}$.

3) Уравнение $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, разрешимо единственным образом; решение $\mathbf{x} \in V$ называется *разностью* векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, пишут: $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. В частности, $\mathbf{0} - \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

4) Законы ассоциативности и коммутативности сложения, так же как и дистрибутивные законы, методом полной индукции можно обобщить на любое конечное число слагаемых.

5) Для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ и действительных чисел α, β выполняются соотношения:

а) $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$; б) $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$;

в) $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$; г) $-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

д) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$; е) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$,

ж) $(-\alpha)\mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a})$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$;

з) $\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$, $(\alpha - \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{a}$.

2.4.4.1.2. Векторные подпространства. Пусть V – векторное пространство и U – непустое подмножество в V. Если U по отношению к тем же операциям сложения и умножения само является векторным пространством, то U называется *векторным подпространством* (пространства) V. Чтобы проверить, является ли U векторным подпространством V, не требуется доказывать истинность всех аксиом, так как имеет место *критерий*: $U (\varnothing \neq U \subseteq V)$ есть векторное подпространство V тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ и любого действительного α справедливы включения $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$ и $\alpha\mathbf{a} \in U$ (замкнутость U по отношению к операциям $+$ и $\cdot$).

Примеры. 1) Всякое векторное пространство имеет два тривиальных векторных подпространства, а именно: само себя и то, которое содержит нулевой вектор в качестве единственного элемента.

2) В векторном пространстве конечных последовательностей действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подмножество, содержащее все такие последовательности, что $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$ (c_i – фиксированные действительные числа), образует векторное подпространство по отношению к операциям сложения и умножения, определенным для последовательностей.

3) В векторном пространстве многочленов подмножество всех многочленов степени, меньшей n, образует векторное подпространство по отношению к операциям сложения и умножения, определенным для многочленов.

4) Пусть S – непустое множество векторного пространства. Всякое выражение вида $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{a}_r$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – произвольные действительные и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in S$, называется *линейной комбинацией* элементов S. Множество всех линейных комбинаций векторов из S образует векторное подпространство.

5) Если U_1 и U_2 – векторные подпространства одного и того же векторного пространства V, то их пересечение $U_1 \cap U_2$ также есть векторное подпространство пространства V. То же самое справедливо и для пересечения большего числа подпространств.

6) Пусть S – произвольное множество векторов векторного пространства V. Можно рассмотреть пересечение всех векторных подпространств пространства V, содержащих S. Это снова есть векторное подпространство, а именно наименьшее векторное подпространство, содержащее S. Его называют *линейной оболочкой* множества S и пишут: $\mathscr{L}(S) = \bigcap \{U_\sigma: U_\sigma$ – векторное подпространство V и $S \subseteq U_\sigma\}$.

Если $S = \varnothing$, то $\mathscr{L}(S)$ есть векторное подпространство из V, содержащее только нулевой вектор.

Если $S \neq \varnothing$, то $\mathscr{L}(S)$ наряду с S содержит в качестве векторного пространства всякую линейную комбинацию векторов из S. Так как множество всех линейных комбинаций S само образует векторное подпространство из V, содержащее S, а $\mathscr{L}(S)$ есть наименьшее векторное подпространство, обладающее этим свойством, то $\mathscr{L}(S)$ состоит как раз из всех линейных комбинаций векторов из S:

$$\mathscr{L}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i;\ \lambda_i \in \mathbf{R};\ \mathbf{a}_i \in S;\ r \text{ – натуральное число} \right\}.$$

Из $S_1 \subseteq S_2$ следует $\mathscr{L}_1(S) \subseteq \mathscr{L}(S_2)$. Если U есть векторное подпространство из V, то $\mathscr{L}(U) = U$, и наоборот.

Если векторное подпространство U пространства V можно представить как линейную оболочку множества S векторов из V, то S называется *системой, порождающей* U.

7) В то время как для двух векторных подпространств U_1 и U_2 пространства V их пересечение вновь является векторным подпространством, для их объединения это в общем случае не так. Наименьшее векторное подпространство из V, содержащее $U_1 \cup U_2$, т. е. $\mathscr{L}(U_1 \cup U_2)$, называют *суммой* $U_1 + U_2$ (или *композицией*) U_1 и U_2. Оно состоит из всех векторов $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in U_1$, $\mathbf{x}_2 \in U_2$.

2.4.4.1.3. Линейная зависимость. Непустое конечное множество $S = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ элементов векторного пространства V называется *линейно зависимым*, если существуют действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Если это соотношение имеет место *только* при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, то множество S называется *линейно независимым*. Вектор $\mathbf{x} \in V$ называется *линейно зависимым* от S, когда он является линейной комбинацией векторов из S, т. е. если $\mathbf{x} \in \mathscr{L}(S)$. В случае, если $\mathbf{x} \notin \mathscr{L}(S)$, вектор $\mathbf{x}$ называется *линейно независимым* от S.

Примеры. 1) Вектор $\mathbf{x}=(3,\ -7,\ 0)$ векторного пространства упорядоченных троек действительных чисел линейно зависит от множества

$$S=\{(1,\ -1,\ 0);\ (0,\ 1,\ 1);\ (3,\ 0,\ 5);\ (2,\ -1,\ 3)\},$$

так как, например, $\mathbf{x}=2(1,\ -1,\ 0)-3(3,\ 0,\ 5)+5(2,\ -1,\ 3)$, т. е. $\mathbf{x}\in\mathscr{L}(S)$.

2) Вектор $\mathbf{x}=(3,\ -7,\ 0)$ не является линейно зависимым от множества $S=\{(0,\ 1,\ 1);\ (0,\ -2,\ 5)\}$, так как каждая линейная комбинация векторов из S дает, очевидно, вектор, первая координата которого равна нулю, т. е. вектор $\mathbf{x}$ линейно независим от S.

3) Нулевой вектор линейно зависит от каждого множества S, так как $\mathbf{0}\in\mathscr{L}(S)$ для любого S.

Множество S векторов из V называется *линейно зависимым*, если существует по крайней мере один вектор $\mathbf{x}\in S$, который линейно зависит от $S\setminus\{\mathbf{x}\}$. Если любой вектор $\mathbf{x}\in S$ линейно не зависит от $S\setminus\{\mathbf{x}\}$, то S называется *линейно независимым*.

Примечание. В случае, когда S – непустое конечное множество, это определение эквивалентно определению, данному в начале пункта.

Из этого следует, в частности, что пустое множество $S=\varnothing$ линейно независимо. Множество $S=\{\mathbf{0}\}$, содержащее только нулевой вектор $\mathbf{0}$, линейно зависимо, так как

$$\mathbf{0}\in\mathscr{L}(S\setminus\{\mathbf{0}\})=\mathscr{L}(\varnothing)=\{\mathbf{0}\}.$$

Из определения следует: каждое множество S, содержащее линейно зависимое подмножество S', само линейно зависимо. Действительно, если S' линейно зависимо, то по крайней мере для одного $\mathbf{x}\in S'$ справедливо $\mathbf{x}\in\mathscr{L}(S'\setminus\{\mathbf{x}\})$ и вследствие $\mathscr{L}(S'\setminus\{\mathbf{x}\})\subseteq\mathscr{L}(S\setminus\{\mathbf{x}\})$ также и $\mathbf{x}\in\mathscr{L}(S\setminus\{\mathbf{x}\})$.

Справедливо утверждение: каждое подмножество S' линейно независимого множества S само является линейно независимым. Если $S'=\varnothing$, то S' линейно независимо, а в случае $S'\neq\varnothing$ утверждение следует из предыдущего утверждения.

В частности, любое конечное подмножество S' линейно независимого множества S само линейно независимо. И наоборот, из линейной независимости всех конечных подмножеств S' множества S следует линейная независимость S.

Примеры. 1) В векторном пространстве упорядоченных пар действительных чисел множество $\{(3,\ 0);\ (-1,\ 2);\ (7,\ 1)\}$ является линейно зависимым, так как справедливо равенство $5(3,\ 0)+(-1,\ 2)-2(7,\ 1)=(0,\ 0)$.

2) В векторном пространстве многочленов множество $S=\{x^{3n},\ n\text{ – натуральное}\}$ линейно независимо ввиду того, что каждое конечное подмножество $\{x^{3\nu_1},\ x^{3\nu_2},\ \ldots,\ x^{3\nu_n}\}$ элементов из S линейно независимо, так как из предположения $\lambda_1x^{3\nu_1}+\lambda_2x^{3\nu_2}+\ldots+\lambda_kx^{3\nu_k}=0$ (для любого x) следует, что все коэффициенты λ_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ равны нулю.

3) В векторном пространстве многочленов множество

$$\{x^3+2x^2;\ 2x^3+2x^2-6x+4;\ -x^2+3x;\ x^2-1\}$$

является линейно зависимым множеством векторов, так как, например,

$$2(x^3+2x^2)-(2x^3+2x^2-6x+4)-$$
$$-2(-x^2+3x)-4(x^2-1)=0.$$

4) В векторном пространстве комплексных чисел над полем действительных чисел множество $\{1,\ i\}$ является линейно независимым множеством, так как соотношение $\lambda_1\cdot1+\lambda_2\cdot i=0$ выполняется с действительными λ_1 и λ_2 только при $\lambda_1=\lambda_2=0$. В векторном пространстве комплексных чисел над полем комплексных чисел множество $\{1,\ i\}$ линейно зависимо: $\lambda_1\cdot1+\lambda_2\cdot i=0$ при $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-1$.

Другие свойства линейной зависимости.

1. Если S линейно независимо, а $S\cup\{\mathbf{x}\}$ линейно зависимо, то $\mathbf{x}$ есть линейная комбинация векторов из S.

2. Если S линейно независимо, $\mathbf{x}$ линейно независимо от S, то $S\cup\{\mathbf{x}\}$ также линейно независимо.

3. Если S линейно независимо, $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k\in S$, то из соотношения

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_k\mathbf{a}_k=\mu_1\mathbf{a}_1+\ldots+\mu_k\mathbf{a}_k$$

следует, что $\lambda_1=\mu_1,\ \ldots,\ \lambda_k=\mu_k$, т. е. к линейно независимому S всегда можно применить «принцип приравнивания коэффициентов».

Если S линейно зависимо, то это уже не так; например, для $\mathbf{a}_1=(3,\ 0)$, $\mathbf{a}_2=(-1,\ 2)$, $\mathbf{a}_3=(7,\ 1)$ имеем

$$7\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1-4\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3.$$

2.4.4.1.4. Базис. Размерность. Если B – система векторов, порождающая векторное пространство V, то каждый вектор $\mathbf{x}\in V$ можно представить в виде линейной комбинации векторов из B. Если, кроме того, система B линейно независима, то представление $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации векторов из B определено однозначно. Такая линейно независимая порождающая система B называется *базисом* пространства V.

Итак, если $V=[V,+,\cdot]$ есть векторное пространство, то каждое подмножество $B\subseteq V$ такое, что 1) $\mathscr{L}(B)=V$ и 2) B линейно независимо, называется *базисом* пространства V.

Примеры. 1) В векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ всех упорядоченных n-последовательностей действительных чисел множество $B=\{\mathbf{e}_1=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0);\ \mathbf{e}_2=(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0);\ \ldots$ $\ldots;\ \mathbf{e}_n=(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1)\}$ есть базис; он называется *каноническим базисом* пространства $\mathbf{R}^n$.

2) В векторном пространстве всех многочленов множество $B=\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots\}$ есть базис, так как B линейно независимо и каждый многочлен $p(x)$ можно записать в виде линейной комбинации элементов из B:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i.$$

3) В векторном пространстве всех решений уравнения $3x+4y-z=0$, например, множество $B=\{(1,\ 0,\ 3);\ (0,\ 1,\ 4)\}$ является базисом, так как B линейно независимо и каждое решение уравнения можно представить в виде $\mathbf{x}=(x,\ y,\ z)=$ $=\lambda_1(1,\ 0,\ 3)+\lambda_2(0,\ 1,\ 4)$ (см. 2.4.4.3).

4) Векторное пространство, состоящее только из нулевого вектора $\mathbf{0}$, имеет $B=\varnothing$ в качестве (единственного) базиса вследствие того, что $\mathscr{L}(\varnothing)=\{\mathbf{0}\}$, и линейной независимости $\varnothing$.

Справедливы следующие утверждения о существовании базиса и его свойствах.

1. Каждое векторное пространство имеет (по меньшей мере один) базис. Каждая порождающая система векторного пространства содержит базис. Из этого, в частности, следует: если V – векторное пространство, порождаемое конечной системой, т. е. имеет место равенство $V=\mathscr{L}(S)$, где S – конечное множество, то V имеет конечный базис.

2. Каждый базис B векторного пространства V есть минимальная порождающая система V, т. е. (а) $\mathscr{L}(B)=V$; (б) для всех B' таких, что $B'\subset B$, справедливо соотношение $\mathscr{L}(B')\neq V$. Наоборот,

каждое подмножество $B \subseteq V$, удовлетворяющее условиям (а) и (б), является базисом V.

3. Каждый базис B векторного пространства V есть максимальное линейно независимое подмножество пространства V в следующем смысле: (а) множество B линейно независимо; (б) для всех B' таких, что множество $B' \supset B$, B' линейно зависимо. Наоборот, каждое подмножество $B \subseteq V$, удовлетворяющее условиям (а) и (б), является базисом V.

4. Пусть B – базис векторного пространства V, и пусть S – линейно независимое подмножество, содержащее m векторов из V. Тогда в B всегда можно найти такое подмножество B^*, также состоящее из m векторов, что множество $(B \backslash B^*) \bigcup S$, в котором векторы из B^* заменены на векторы из S, снова будет базисом V. Другими словами, это означает, что некоторое подмножество из m векторов базиса можно заменить на заданное линейно независимое подмножество, состоящее из m векторов, без потери при этом свойства базиса. Таким образом, всегда можно построить базис, содержащий заданную линейно независимую систему векторов.

При помощи утверждений 2–4 можно построить базисы векторного пространства V, порождаемого конечной системой. Для этого или «сокращают» порождающую систему V последовательным отбрасыванием векторов, которые являются линейной комбинацией остальных векторов, до тех пор, пока «сокращенная» порождающая система не станет линейно независимой, или добавляют к линейно независимому множеству T^m вектор $\mathbf{x}_{m+1}$, который не является линейной комбинацией векторов из T^m, затем к $T^{m+1} = T^m \bigcup \{\mathbf{x}_{m+1}\}$ добавляют вектор $\mathbf{x}_{m+2}$, не являющийся линейной комбинацией векторов T^{m+1}, и т. д. до тех пор, пока «расширенное» линейно независимое множество T^n $(n \geqslant m)$ не станет порождающей системой V. Предположение, что «V порождается конечной системой», обеспечивает обрыв обоих процессов после конечного числа шагов. Векторное пространство, порождаемое конечной системой, называется *конечномерным*.

В частности, все базисы конечномерного векторного пространства состоят из одинакового количества векторов; число базисных векторов, одинаковое для всех базисов векторного пространства, называется его *размерностью* и обозначается $\dim V$. Векторное пространство, содержащее только нулевой вектор, имеет размерность нуль. Если векторное пространство не порождается конечной системой, то оно называется *бесконечномерным*.

Примеры. 1) Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ упорядоченных n-последовательностей действительных чисел имеет размерность n $(\dim \mathbf{R}^n = n)$, так как канонический базис, а следовательно, и любой базис $\mathbf{R}^n$ содержат n векторов.

2) Векторное пространство перемещений на плоскости двумерно, так как каждые два непараллельных вектора образуют базис этого векторного пространства.

3) Векторное пространство многочленов бесконечномерно.

Если векторное пространство V имеет размерность $n \geqslant 1$, то каждый базис V есть линейно независимое множество из n векторов. И наоборот, каждое линейно независимое множество, содержащее n векторов из V, есть базис V. Это дает удобный для практических исследований *критерий базиса*, если известна размерность векторного пространства.

Соотношение $\dim V = n \geqslant 1$ выполняется тогда и только тогда, когда в V существует по крайней мере одно линейно независимое множество, состоящее из n векторов, в то время как все множества, содержащие $n+1$ векторов, линейно зависимы.

Пусть V – конечномерное векторное пространство, а U, U_1 и U_2 – векторные подпространства V. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\dim U \leqslant \dim V$ и $\dim U = \dim V$ только тогда, когда $U = V$;

2) из $U_1 \subseteq U_2$ и $\dim U_1 = \dim U_2$ следует $U_1 = U_2$;

3) $\dim(U_1 \bigcap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Координаты. Пусть V – n-мерное пространство $(n \geqslant 1)$ и $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – базис V. Вследствие 1-го свойства базиса $(\mathscr{L}(B) = V)$ каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно представить как линейную комбинацию векторов из B: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$, и вследствие линейной независимости B это представление $\mathbf{x}$ единственно (с точностью до порядка слагаемых). Если базисные векторы в B каким-нибудь образом упорядочить, то каждому вектору $\mathbf{x}$ можно взаимно однозначно поставить в соответствие упорядоченную n-последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел – его координаты.

Пусть V – n-мерное векторное пространство $(n \geqslant 1)$ и $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – базис V, базисные векторы которого $\mathbf{a}_i$ стоят в фиксированном порядке*). Если $\mathbf{x} \in V$, то однозначно определенные коэффициенты в представлении $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{a}_i$ в виде линейной комбинации векторов B называют *координатами* $\mathbf{x}$ *по отношению к* B и пишут: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$.

Вместо векторов V можно производить вычисления с сопоставленными им по отношению к B упорядоченными n-последовательностями координат в соответствии со следующими утверждениями. Упорядоченная n-последовательность координат, поставленная в соответствие сумме $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по отношению к B, получается как сумма упорядоченных n-последовательностей координат, сопоставленных по отношению к B векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Упорядоченная n-последовательность координат вектора $\alpha\mathbf{x}$ по отношению к B равна упорядоченной n-последовательности координат вектора $\mathbf{x}$ по отношению к B, умноженной на α.

Вследствие этого взаимно однозначное соответствие между n-мерным векторным пространством V и векторным пространством упорядоченных n-последовательностей действительных чисел является изоморфизмом. Справедливо следующее утверждение: каждое n-мерное векторное пространство изоморфно векторному пространству упорядоченных n-последовательностей действительных чисел.

Преобразование координат. При переходе от одного базиса $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

*) Всюду в дальнейшем будем понимать базис именно так.

векторного пространства V к другому базису $B^* = \{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$, конечно, изменяются координаты вектора $\mathbf{x} \in V$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)_{B^*}$. Если базисные векторы $\mathbf{a}_i^*$ базиса B^* связаны с базисными векторами $\mathbf{a}_i$ базиса B уравнениями $\mathbf{a}_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{a}_k (i = 1, 2, \ldots, n)$, то для координат x_i и x_i^* одного и того же вектора $\mathbf{x}$ имеет место следующее соотношение: $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Матричный способ записи:

$$\text{Если} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \\ \mathbf{a}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \text{ то } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix},$$

где A есть матрица из элементов a_{ik}, а A^T – матрица, транспонированная по отношению к A. Говорят, что координаты $\mathbf{x}$ преобразуются *контраградиентно* по отношению к базисным векторам.

Пример. Пусть $\mathbf{R}^3$ есть векторное пространство упорядоченных троек действительных чисел, $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – канонический базис $\mathbf{R}^3$ и $B^* = \{\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)\}$ – другой базис $\mathbf{R}^3$. Тогда вектор $\mathbf{x} = (3, -1, 2)_B$ имеет по отношению к B^* координаты $\mathbf{x} = (2, -3, 4)_{B^*}$, так как $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1$, т. е. $x_1 = x_1^* + x_2^* + x_3^*$, $x_2 = x_1^* + x_2^*$, $x_3 = x_1^*$, откуда следует: $x_1^* = x_3 = 2$, $x_2^* = x_2 - x_3 = -3$, $x_3^* = x_1 - x_2 = 4$.

2.4.4.1.5. Евклидовы векторные пространства. Чтобы иметь возможность ввести в векторном пространстве понятия «длина вектора» и «угол между двумя векторами», его следует снабдить дополнительной структурой – метрикой. Это делается при помощи скалярного произведения.

Пусть $V = [V, +, \cdot]$ – действительное векторное пространство. Функция φ: $V \times V \to \mathbf{R}$, которая каждым двум векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V ставит в соответствие действительное число, называется *скалярным произведением* в V, если она обладает следующими свойствами:

1) дистрибутивностью: $\varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;

2) коммутативностью: $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3) однородностью: $\varphi(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (α – действительное);

4) положительной определенностью: $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Действительное векторное пространство $V = [V, +, \cdot, \varphi]$ с таким скалярным произведением φ называется *евклидовым векторным пространством*. Вместо $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ часто пишут $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Примеры. 1) В векторном пространстве V^2 упорядоченных пар чисел (x, y) скалярное произведение зададим, например, так:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 9x_1x_2 - 6x_1y_2 - 6y_1x_2 + 5y_1y_2.$$

Выполнение свойств 1) – 3) проверяют вычислением, а свойство 4) справедливо вследствие того, что

$$((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = 9x_1^2 - 12x_1y_1 + 5y_1^2 = (3x_1 - 2y_1)^2 + y_1^2 > 0$$

для всех $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$.

2) В векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ упорядоченных n-последовательностей действительных чисел скалярное произведение определим так:

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

3) В векторном пространстве всех непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций скалярное произведение определим соотношением $(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.

Модуль вектора. Пусть V – евклидово векторное пространство. Под *модулем* (*нормой*, *длиной*) $\|\mathbf{x}\|$ вектора $\mathbf{x} \in V$ понимают неотрицательное действительное число $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Вектор с модулем, равным 1, называется *единичным* вектором; для каждого вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ вектор $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ единичный.

Из свойств скалярного произведения вытекают следующие свойства модуля: для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и всех действительных чисел α

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$;

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (*неравенство треугольника*).

Если заменить в последней формуле $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, а затем $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, то получим, что $|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Знак равенства возможен только тогда, когда $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, $\alpha \geqslant 0$.

Имеет место неравенство *Коши – Буняковского*: $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. Знак равенства возможен тогда и только тогда, когда множество $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ линейно зависимо.

На основании неравенства Коши – Буняковского *величину угла* между векторами $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ можно определить как действительное число φ, которое удовлетворяет двум условиям:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \text{ и } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Ортогональность. Два вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ евклидова векторного пространства V называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. В частности, нулевой вектор $\mathbf{0}$ ортогонален каждому вектору из V. m-последовательность $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ векторов $\mathbf{x}_i$ евклидова векторного пространства называется *ортогональной системой*, если она не содержит нулевого вектора и векторы $\mathbf{x}_i$ попарно ортогональны, т. е. $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ для любых i и j $(i \neq j)$; она называется *ортонормированной системой*, если, кроме того, все векторы $\mathbf{x}_i$ являются единичными, т. е. если

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Ортонормированная система, которая одновременно является базисом векторного пространства, называется *ортонормированным базисом*.

Свойства ортогональной системы.

1. Каждая ортогональная система линейно независима.

2. Если координаты двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ заданы относительно ортонормированного базиса B: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_B$, то их скалярное произведение равно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

3. Каждое евклидово векторное пространство конечной размерности имеет ортонормированный базис.

Такой ортонормированный базис можно получить *методом ортогонализации (Грама – Шмидта)* из любого базиса евклидова векторного пространства конечной размерности V путем «последовательной ортогонализации». Если $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – базис V, то из него получают ортогональную систему $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, где

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \text{ и } \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \mathbf{b}_i \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Тогда $\left\{\frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_n}{\|\mathbf{b}_n\|}\right\}$ – ортонормированный базис V.

Пример. $\{(-1, 2, 3, 0); (0, 1, 2, 1); (2, -1, -1, 1)\}$ – базис векторного подпространства U векторного пространства упорядоченных четверок действительных чисел. Скалярное произведение определено соотношением $((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Тогда методом ортогонализации получим ортогональную систему $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 3, 0),$$

$$\mathbf{b}_2 = (0, 1, 2, 1) - \frac{4}{7}(-1, 2, 3, 0) = \frac{1}{7}(4, -1, 2, 7),$$

$$\mathbf{b}_3 = (2, -1, -1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 2, 3, 0) - \frac{1}{5}(4, -1, 2, 7) = \frac{1}{10}(7, 2, 1, -4).$$

Если перейти, наконец, от $\mathbf{b}_i$ к соответствующим единичным векторам, то получим искомый ортонормированный базис векторного подпространства U в следующем виде:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 2, 3, 0); \frac{1}{\sqrt{70}}(4, -1, 2, 7); \frac{1}{\sqrt{70}}(7, 2, 1, -4)\right\}.$$

Ортогональные векторные подпространства. Два векторных подпространства U_1, U_2 евклидова векторного пространства V называются *взаимно ортогональными* (обозначается: $U_1 \perp U_2$), когда для любого $\mathbf{x} \in U_1$ и любого $\mathbf{y} \in U_2$ справедливо равенство $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Если U – векторное подпространство пространства V, то множество $U^\perp = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V \text{ и } (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{u} \in U\}$ называется *ортогональным дополнением* U в V. Ортогональное дополнение $U^\perp$ с определенными в V операциями вновь является векторным подпространством $U^\perp = [U^\perp, +, \cdot]$, при этом выполняется соотношение $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Если, кроме того, V – пространство конечной размерности, то $(U^\perp)^\perp = U$ и $U + U^\perp = V$, откуда следует, что $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$. Так как $U + U^\perp = V$, то каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u} \in U$, а $\mathbf{v} \in U^\perp$; учитывая, что $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$, разложение вектора $\mathbf{x}$ в сумму такого вида единственно. Вектор $\mathbf{u}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на U, а $\mathbf{v}$ – *ортогональной составляющей* вектора $\mathbf{x}$, *перпендикулярной* U. Для всех $\mathbf{a} \in U$ справедливо соотношение $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, т. е. перпендикуляр $\mathbf{v}$ имеет известное свойство «кратчайшего расстояния».

2.4.4.1.6. Гильбертово пространство. Многое из сказанного в 2.4.4.1.5 о евклидовом векторном пространстве остается справедливым и в том случае, если это пространство бесконечномерно, хотя некоторые утверждения, в которых упоминается размерность n, нуждаются в уточнении. Наиболее важным обобщением понятия евклидова пространства является *гильбертово пространство* H, определяемое следующими свойствами:

1) H – бесконечномерное векторное пространство.

2) Для векторов $x, y \in H$ определено скалярное произведение (x, y), для которого справедливы свойства 1) – 4) скалярного произведения евклидова пространства. Величина $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ называется *нормой* элемента $x \in H$.

3) Для любой последовательности векторов $x_n \in H (n = 1, 2, \ldots)$, для которой $\lim\limits_{n, m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$, существует вектор $x \in H$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0$ (свойство *полноты*).

Бесконечная последовательность векторов в H называется *линейно независимой*, если любое конечное подмножество этой последовательности линейно независимо.

При помощи процесса ортогонализации для любой линейно независимой последовательности можно построить ортонормированную систему, эквивалентную исходной последовательности в том смысле, что линейные оболочки подмножеств их первых n элементов совпадают для любого n.

Если $y_1, y_2, \ldots$ – ортонормированная система, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. При этом $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ (теорема Пифагора в гильбертовом пространстве).

В любом бесконечномерном подпространстве $H_1 \subset H$ (в том числе и в самом H) существует ортонормированный базис $B(y_1, y_2, \ldots)$, т. е. такой ортонормированный набор векторов, что для произвольного элемента $x \in H_1$ справедливо разложение $x = \sum\limits_{y_i \in B} (x, y_i) y_i$, где ряд сходится по норме.

Хорошо известным примером гильбертова пространства l^2, элементами которого являются последовательности действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится. Скалярное произведение элементов $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ определяется как $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Ортонормированным базисом в l^2 может служить последовательность векторов $e_1 = (1, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots, e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots), \ldots$

2.4.4.2. Матрицы и определители.

2.4.4.2.1. Понятие матрицы. Если $m \cdot n$ выражений расставлены в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

то говорят о *матрице* размера $m \times n$, или сокращенно об $m \times n$-матрице; выражения a_{ik} называются *элементами* матрицы. Положение элемента в таблице характеризуется двойным индексом; первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент (нумерация строк производится сверху вниз, а столбцов – слева направо). Элементами матрицы, как правило, являются числа, но иногда и другие математические объекты, например, векторы, многочлены, дифференциалы и даже матрицы.

Матрица обозначается следующими способами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

а также $\| a_{ik} \|$ или (a_{ik}).

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей порядка n*. Квадратная матрица $\| a_{ik} \|$ порядка n называется:

верхней треугольной матрицей, если $a_{ik} = 0$ для всех $i > k$;

нижней треугольной матрицей, если $a_{ik} = 0$ для всех $i < k$;

диагональной матрицей, если $a_{ik} = 0$ для всех $i \neq k$;

единичной матрицей, если

$$a_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Элементы a_{ii}, т. е. элементы, стоящие в таблице на диагонали квадрата, проходящей из левого верхнего угла в правый нижний, – на *главной диагонали* матрицы, – называются *главными диагональными элементами* или просто *диагональными элементами*; элементы $a_{i,n-i+1}$ $(i = 1, \dots, n)$, т. е. элементы, стоящие на диагонали, которая проходит из правого верхнего угла в левый нижний (*побочная диагональ* матрицы), иногда называются *побочными диагональными элементами*. В случае $m \times n$-матриц элементы a_{ii} $(i = 1, \dots, \min(m, n))$ также называют *главными диагональными элементами* или просто *диагональными элементами*. Сумма главных диагональных элементов называется *следом* (Spur, Trace) матрицы и обозначается $\operatorname{Sp} A$ или $\operatorname{Tr} A$.

Матрица размером $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*; аналогично говорят о *матрице-столбце*, если речь идет о матрице размера $m \times 1$; $m \times n$-матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой $m \times n$-матрицей* и обозначается O. Каждая таблица вида

$$\begin{bmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_s} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_s} \\ . & . & . & . \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & \dots & a_{i_rk_s} \end{bmatrix},$$

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_r \leqslant m; \ 1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_s \leqslant n,$$

которая получается из $m \times n$-матрицы $\| a_{ik} \|$ вычеркиванием части строк и столбцов, называется *подматрицей матрицы* $\| a_{ik} \|$. По определению матрица $\| a_{ik} \|$ сама должна быть причислена к своим подматрицам. Если элементы строк матрицы $A = \| a_{ik} \|$ расставлены в столбцы (при этом одновременно элементы столбцов расставляются в строки), то полученная матрица называется *транспонированной* к A и обозначается $A^T = \| a_{ik}^T \|$, если $a_{ik}^T = a_{ki}$.

2.4.4.2.2. Определитель квадратной матрицы. Каждой квадратной матрице $A = \| a_{ik} \|$ порядка n с действительными или комплексными элементами можно однозначно поставить в соответствие действительное или комплексное число D, которое называется определителем матрицы A:

$$D = \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{Z(\pi)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

причем сумма должна быть распространена на все подстановки π набора чисел $1, 2, \dots, n$. Таким образом, из элементов матрицы A сначала составляют все возможные произведения

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

из n сомножителей каждое, содержащие по одному элементу из каждой строки и по одному из каждого столбца. Знак $(-1)^{Z(\pi)}$ определяется числом $Z(\pi)$ – числом инверсий подстановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

(см. 2.2.4). Полученные $n!$ слагаемых и составляют в сумме $\det A$.

Определитель обозначается также Δ и $|a_{ik}|$.

Если $D = |a_{ik}|$ – определитель порядка n, то *минором* M_{ik} элемента a_{ik} называют определитель порядка $n - 1$, получающийся из D «вычеркиванием» i-й строки и k-го столбца. Под *алгебраическим дополнением* A_{ik} элемента a_{ik} понимают минор M_{ik}, домноженный на $(-1)^{i+k}$:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} =$$

$$= (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2,k-1} & a_{2,k+1} \dots a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} \dots & \dots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} \dots & \dots a_{i+1,n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{n,k-1} & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Примеры. 1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Свойства определителей. Если рассматривать строки определителя D порядка n как векторы $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$, то свойства определителя $D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ с *вектор-строками* $\mathbf{z}_i$ удобно сформулировать так:

1) Перестановка строк может изменять лишь знак определителя D:

$$D(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = -D(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_n);$$

в общем случае

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = (-1)^{Z(\pi)} D(\mathbf{z}_{\pi(1)}, \mathbf{z}_{\pi(2)}, \ldots, \mathbf{z}_{\pi(n)}),$$

где π – подстановка чисел $1, 2, \ldots, n$, а $Z(\pi)$ – число ее инверсий.

2) Общий для всех элементов строки множитель можно выносить за знак определителя:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \alpha\mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = \alpha D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

3) При сложении двух определителей, различающихся только одной строкой, соответствующие элементы этой строки складываются:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) + D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}'_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k + \mathbf{z}'_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

4) Прибавление кратного k-й строки к i-й строке не изменяет значения определителя D $(i \neq k)$:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i + \alpha\mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

5) $D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ есть линейно зависимое множество векторов. В частности, $D = 0$, если одна строка D состоит из нулей или если две строки D равны или пропорциональны друг другу.

6) Определитель не изменит своего значения, если поменять в нем местами строки и столбцы, т. е. *транспонировать* определитель. Поэтому все свойства, сформулированные для строк, верны и для столбцов.

Теорема разложения. Если $D = |a_{ik}|$ – определитель n-го порядка, то

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

т. е. сумма произведений всех элементов какой-либо строки (или столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения равна значению определителя. Сумма произведений всех элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или другого столбца) равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{li} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = 0, \quad k \neq l.$$

Суммируя сказанное, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{li} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = \begin{cases} D, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Вычисление определителей. Значение определителя 2-го порядка вычисляется по мнемоническому правилу «произведение главных диагональных элементов минус произведение побочных диагональных элементов»:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Для нахождения значения определителя 3-го порядка также можно указать мнемоническое правило, так называемое *правило Саррюса*: приписать к определителю справа два первых столбца, не меняя их порядка, и составить сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, из которой затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов, параллельных ей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определители более высоких порядков тоже можно вычислять по определению, однако это требует больших усилий. Чаще поступают следующим образом: определитель n-го порядка сводят к определителям $(n-1)$-го порядка, последнее – к определителям $(n-2)$-го порядка и т. д. до тех пор, пока не получат определители 3-го или 2-го порядка. В основе этого принципа «постепенного понижения порядка» лежит теорема разложения: определитель n-го порядка D записывается в виде суммы определителей порядка $n-1$ («раскладывается по элементам i-й строки или k-го столбца»); к каждому из этих определителей порядка $n-1$ вновь может быть применена теорема разложения. Если все элементы i-й строки определителя D, кроме одного, равны нулю, то сумма, полученная после применения теоремы разложения, содержит не более одного отличного от нуля слагаемого. Таким образом, вычисления существенно упростятся, если перед разложением определителя по элементам i-й строки как можно большее их число будет превращено в нули. Это становится возможным благодаря применению свойств определителей (особенно свойства 4)).

Пример.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(свойство 4)) (свойство 2))

$$= 3\left\{-4\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\right\} =$$

(теорема разложения)

$$= 0 - 21\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -21\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(свойство 5)) (свойство 4))

$$= -21\left\{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right\} = -21\{(4+10) - (16+5)\} = +147.$$

(теорема разложения)

Вычисление определителя оказывается еще более удобным, если, применяя свойства 1)–5), его можно преобразовать, так, чтобы все элементы, стоящие слева и ниже главной диагонали $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, были равны нулю. Как легко понять на основании теоремы разложения, значение определителя получается тогда просто как произведение членов, стоящих на главной диагонали.

2.4.4.2.3. Ранг матрицы. Квадратная матрица называется *невырожденной* (*неособенной*) или *вырожденной* (*особенной*) в зависимости от того, отличен ее определитель от нуля или равен нулю.

Матрица $A \neq O$ (см. O в 2.4.4.2.1) имеет *ранг* $\operatorname{rang}(A) = p$, если A имеет по меньшей мере одну невырожденную (неособенную) подматрицу порядка p, а все квадратные подматрицы A более высоких порядков вырождены (особенные). Если дополнительно положить $\operatorname{rang}(O) = 0$, то каждой матрице будет сопоставлено одно неотрицательное целое число – ранг матрицы.

Пример.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

так как подматрица 2-го порядка $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ невырождена, а все подматрицы 3-го порядка вырождены.

Теоремы о ранге. Если рассматривать строки (или столбцы) матрицы A как векторы $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m$ (или $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$), то теоремы о ранге матрицы A с вектор-строками $\mathbf{z}_i$ удобно формулировать так:

1. Если $\operatorname{rang} A = \rho$, то существует линейно независимое множество из ρ вектор-строк матрицы A, в то время как все множества из σ вектор-строк ($\sigma > \rho$) матрицы A линейно зависимы. Иначе говоря, ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых вектор-строк матрицы A.

2. Ранг матрицы A не изменяется при следующих преобразованиях:

а) при перемене местами двух строк;

б) при умножении одной строки на число $c \neq 0$;

в) при сложении любого кратного одной строки с другой строкой;

г) при транспонировании A.

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A^T)$, то теоремы, указанные выше для строк, справедливы и для столбцов.

Вычисление ранга. Нахождение ранга матрицы $A = \| a_{ik} \| \neq O$ сводится к тому, чтобы при помощи теоремы 2 матрицу A перевести в *трапециевидную матрицу* A' того же ранга:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \ldots a'_{1\rho} & a'_{1,\rho+1} \ldots a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} \ldots a'_{2\rho} & a'_{2,\rho+1} \ldots a'_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \ \ldots a'_{\rho\rho} & a'_{\rho,\rho+1} \ldots a'_{\rho n} \\ 0 & 0 \ \ldots 0 & 0 \quad \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \ \ldots 0 & 0 \quad \ldots 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \rho \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-\rho \text{ строк} \end{matrix}$$

(ρ столбцов, $n-\rho$ столбцов)

в которой: а) все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю; б) либо все элементы последних $m - \rho$ строк обращаются в нуль, либо $m = \rho$; в) все элементы главной диагонали $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{\rho\rho}$ отличны от нуля.

Если применить определение ранга к матрице A', то получим непосредственно, что $\operatorname{rang}(A') = \rho$ (т. е. ранг матрицы A' равен числу главных диагональных элементов, отличных от нуля), и тогда $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') = \rho$.

Чтобы преобразовать матрицу $A \neq O$ в трапециевидную матрицу A' равного ранга, поступают следующим образом:

1) Так как не все элементы A равны нулю, то перестановкой строк и столбцов можно добиться того, чтобы первый диагональный элемент был отличен от нуля ($a'_{11} \neq 0$).

2) Сложением первой строки, умноженной на соответствующий множитель, с другими строками всегда можно добиться, чтобы все элементы первого столбца, стоящие ниже a'_{11}, были равны нулю.

3) Теперь или уже получена желаемая форма матрицы, или в строках со 2-й по m-ю имеется по крайней мере один ненулевой элемент, который при помощи перестановки строк и столбцов может быть поставлен на второе место в главной диагонали. Тогда снова выполняем операции этапа 2) применительно ко 2-й строке и получаем, что все элементы 2-го столбца, стоящие ниже 2-го главного диагонального элемента, равны нулю и т. д., пока через конечное число шагов не получим трапециевидную матрицу.

Этот метод называется *алгоритмом Гаусса*.

Пример.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Для матриц с большими по величине элементами можно использовать теорему 2б), чтобы получить матрицу равного ранга с элементами, меньшими по величине.

2.4.4.2.4. Элементарная алгебра матриц. Равенство матриц. Две матрицы $A = \| a_{ik} \|$ размера $r \times s$ и $B = \| b_{ik} \|$ размера $\rho \times \sigma$ называют *равными*, если они имеют одинаковый размер и все элементы, стоящие на одних и тех же местах, равны между собой, т. е. если $r = \rho$, $s = \sigma$ и $a_{ik} = b_{ik}$ при всех i и k. Тогда пишут $A = B$.

Сумма матриц одинакового размера. *Сумма* $A + B$ двух матриц одинакового размера $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{ik} \|$ есть матрица $C = \| c_{ik} \|$ того же размера с элементами $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ при всех i и k. Таким образом, сложение матриц одинакового размера происходит поэлементно.

Умножение матрицы на действительное число. *Произведение* матрицы $A = \| a_{ik} \|$ на действительное (комплексное) число λ есть матрица $\lambda A = \| \lambda a_{ik} \|$, т. е. умножение матрицы

на действительное (комплексное) число происходит поэлементно.

Свойства сложения и умножения на числа.

1. Сложение матриц одинакового размера *ассоциативно, коммутативно* и *обратимо*. Уравнение $A + X = B$ с матрицами одинакового размера $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{ik} \|$ имеет в качестве единственного решения $X = B - A = \| b_{ik} - a_{ik} \|$ — *разность* матриц B и A.

2. Среди матриц одинакового размера имеется одна нейтральная по отношению к сложению матрица — *нулевая матрица* O, все элементы которой равны нулю.

3. Для каждой матрицы $A = \| a_{ik} \|$ существует (и притом единственная) матрица, обратная по отношению к сложению, так называемая *противоположная* для A *матрица* $-A = \| -a_{ik} \|$. В соответствии с определением разности получаем $O - A = -A$. Далее, имеем $B + (-A) = B - A$ и $-(-A) = A$.

4. Умножение матрицы A на действительные (комплексные) числа λ, μ подчиняется правилам: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $1 \cdot A = A$. Далее, $O \cdot A = O$, $\lambda \cdot O = O$ и $(-1) \cdot A = -A$.

5. Сложение и умножение на числа связаны дистрибутивными законами; для матриц A и B одинакового размера и произвольных действительных (комплексных) чисел λ, μ

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Свойства 1—5, взятые вместе, показывают, что множество всех матриц одинакового размера образует действительное (комплексное) векторное пространство (см. 2.4.4.1).

Умножение сцепленных матриц. Матрицы $A = \| a_{ik} \|$ размера $m \times n$ и $B = \| b_{ik} \|$ размера $r \times s$ называются *сцепленными*, если $n = r$, т. е. число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. При этом матрицы B и A могут оказаться не сцепленными, если $s \neq m$.

Произведение AB двух сцепленных матриц A и B есть матрица $C = (c_{ik})$ размера $m \times s$, где $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, т. е. элемент, стоящий в i-й строке и k-м столбце матрицы произведения, получается в виде скалярного произведения i-й вектор-строки матрицы A на k-й вектор-столбец матрицы B.

Пример.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Свойства умножения матриц.

1. Умножение сцепленных матриц *ассоциативно*.

2. Умножение матриц, вообще говоря, *некоммутативно*. Так, в приведенном примере произведение BA не определено, так как матрицы B и A не сцеплены. Если даже существуют оба произведения AB и BA, то они могут отличаться друг от друга.

3. Существуют *делители нуля*, т. е. $A \neq O$, $B \neq O$, произведение AB которых есть нулевая матрица; например,

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, из того, что $AB = O$, $A \neq O$, нельзя сделать заключение, что $B = O$, и аналогично из $AB = AC$, $A \neq O$, в общем случае не следует, что $B = C$.

4. Существует одна матрица, нейтральная по отношению к умножению, — квадратная *единичная матрица* n-го порядка E_n. Тогда для любой матрицы A размера $m \times n$

$$AE_n = E_m A = A.$$

5. Сложение и умножение матриц связаны *дистрибутивными законами*: если A и B имеют одинаковый размер и сцеплены с C, то $(A + B)C = AC + BC$; если C сцеплена с матрицами A и B одинакового размера, то $C(A + B) = CA + CB$.

На множестве квадратных матриц порядка n всегда выполнимы как сложение, так и умножение, так как каждые две $n \times n$-матрицы имеют одинаковый размер и сцеплены. По отношению к сложению и умножению это множество образует *кольцо матриц*.

6. Для квадратных матриц A и B равных размеров $\det(AB) = \det A \det B$.

7. Если A и B — сцепленные матрицы, то для транспонированных матриц (ср. 2.4.4.2.1) выполнено равенство $(AB)^T = B^T A^T$.

Нахождение обратной матрицы. Если задаться вопросом о существовании матрицы A^{-1}, обратной для квадратной матрицы A порядка n по отношению к умножению, т. е. такой, что $AA^{-1} = E_n$, то вследствие свойства 6 невырожденность матрицы A является необходимым условием существования обратной матрицы, так как в случае вырожденности A было бы $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 0 \neq 1 = \det E_n$.

Если A — матрица n-го порядка, то ее невырожденность есть необходимое и достаточное условие существования матрицы A^{-1} такой, что $AA^{-1} = E_n$. При этих условиях матрица A^{-1}, *обратная* для A, определена однозначно. Кроме того, $A^{-1}A = E_n$.

Далее, для $n \times n$-матриц A и B справедливы формулы

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \ (A^{-1})^{-1} = A.$$

Вычисление обратной матрицы.

1-й способ. Метод неопределенных коэффициентов в применении к $AX = E_n$ приводит к n линейным системам n уравнений с n неизвестными каждая (см. 2.4.4.3.3). Решение каждой из этих n систем уравнений дает столбец искомой матрицы $X = A^{-1}$.

2-й способ.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. То, что эта матрица удовлетворяет

уравнению $AX = E_n$, легко установить, вычисляя матрицу AA^{-1} при помощи теоремы разложения.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Решение матричных уравнений. Матричное уравнение с неизвестной матрицей X, которое приводится к виду $AX = B$ или $XA = B$, может быть решено методом неопределенных коэффициентов. Использование этого метода приводит к решению систем линейных уравнений для столбцов или строк искомой матрицы X (см. 2.4.4.3). Для уравнения $AX = B$ возможны следующие основные случаи.

1. Уравнение не имеет решения: матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $r \times s$ и $m \neq r$, а также $m = r$, но $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A \mid B)$*).

2. Уравнение имеет бесконечное множество решений: матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $m \times s$ и $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid B) < n$*).

3. Уравнение имеет единственное решение: матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $m \times s$ и $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid B) = n$; в частности, если A и B – квадратные матрицы n-го порядка и A – невырожденная матрица; в этом случае уравнение $AX = B$ имеет единственное решение $X = A^{-1}B$.

2.4.4.2.5. Специальные классы матриц. Квадратная матрица A называется:

симметрической, если $A^T = A$;

кососимметрической, если $A^T = -A$;

ортогональной, если A не вырождена и $A^T = A^{-1}$.

Пусть A – квадратная матрица с комплексными элементами; $\bar{A}$ – матрица, *комплексно сопряженная* к A, т. е. получаемая из матрицы A заменой ее элементов на комплексно сопряженные.

Матрица A называется:

эрмитовой, если $A^T = \bar{A}$;

косоэрмитовой, если $A^T = -\bar{A}$;

унитарной, если A не вырождена и $A^T = \bar{A}^{-1}$.

Например, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ есть симметрическая матрица, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ – кососимметрическая матрица, $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ – ортогональная матрица.

Свойства матриц специальных классов.

1. Для каждой матрицы A матрицы AA^T и A^TA являются симметрическими.

2. Любую квадратную матрицу A можно разложить в сумму симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

*) Матрица $(A \mid B)$ получается путем правостороннего присоединения матрицы B к матрице A.

3. Если матрицы A и B ортогональны, то ортогональны также матрицы AB и A^{-1}.

4. Квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда вектор-строки (или вектор-столбцы) матрицы A образуют ортонормированную систему.

5. Для ортогональной матрицы $\det A = \pm 1$.

6. Любая ортогональная матрица 2-го порядка имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varepsilon\sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ – некоторый угол.

2.4.4.3. Системы линейных уравнений.

2.4.4.3.1. Понятие системы линейных уравнений. Система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. 2.4.2.3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

называется системой линейных уравнений или, точнее, *$m \times n$-системой линейных уравнений*; a_{ik} – *коэффициенты*, b_i – *свободные члены* системы. Если все $b_i = 0$, то мы имеем *однородную* систему линейных уравнений, в противном случае говорят о *неоднородной* системе линейных уравнений. n-последовательность чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется *решением $m \times n$*-системы линейных уравнений, если ее элементы, подставленные в заданном порядке вместо неизвестных, удовлетворяют каждому из m уравнений и принадлежат заданной области изменения. (Если нет специальных оговорок, то область изменения всех неизвестных – множество действительных чисел.) Совокупность всех решений системы называется *множеством решений*. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

2.4.4.3.2. Решения системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений всегда разрешимы, так как n-последовательность $(0, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет всем уравнениям системы. Решение $(0, 0, \ldots, 0)$ называют *тривиальным решением*. Вопрос о решениях однородной системы линейных уравнений сводится к вопросу о том, существуют ли, кроме тривиального, другие, нетривиальные решения или нет.

Например, однородная 2×3-система линейных уравнений

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0$$

имеет множество решений $L = \{\lambda(1, -1, 1)\}$; λ – произвольное действительное число; иначе говоря, $x_1 = \lambda$, $x_2 = -\lambda$, $x_3 = \lambda$ при любом действительном λ является решением системы. Напротив, однородная 2×2-система уравнений

$$2x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

имеет только тривиальное решение: $L = \{(0, 0)\}$.

Среди неоднородных систем линейных уравнений существуют неразрешимые системы; например,

$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad x_1 + 2x_2 = 2.$$

Система линейных уравнений

$$5x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 = 7$$

имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2 = -3$, или $L = \{(1, -3)\}$. Напротив, система уравнений

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -5,$$
$$x_2 + x_3 = 1$$

разрешима неоднозначно; при любом действительном λ значения $x_1 = -2 + \lambda$, $x_2 = -\lambda$, $x_3 = 1 + \lambda$ дают решение системы:

$$L = \{(-2, 0, 1) + \lambda(1, -1, 1)\}.$$

Теория систем линейных уравнений может быть наглядно и просто описана при помощи матриц:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ . & . & . \quad . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \; a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

можно записать в виде $Ax = b$.

Характер множества решений этой системы зависит теперь только от $\text{rang}(A)$ (ранга матрицы коэффициентов A системы) и от $\text{rang}(A \mid b)$ (ранга так называемой *расширенной матрицы коэффициентов* $(A \mid b)$).

Ранг	$Ax = b$ (m уравнений, n неизвестных)	Частный случай $b = 0$, (однородная система $Ax=0$)
1. $\text{rang}(A \mid b) \neq \text{rang}(A)$	система неразрешима	этот случай не может иметь места при $b = 0$, т. е. однородная система разрешима всегда
2. $\text{rang}(A \mid b) = \text{rang}(A) = \rho$	система разрешима	
а) $\rho = n$	решение единственно	система имеет только тривиальное решение
б) $\rho < n$	решение не единственно	система имеет нетривиальные решения

Структуру множества решений описывает следующая теорема.

1. Множество решений L однородной $m \times n$-системы линейных уравнений $Ax = 0$ есть векторное подпространство векторного пространства упорядоченных n-последовательностей действительных чисел, т. е. любая линейная комбинация решений системы вновь есть решение системы. Если $\text{rang}(A) = \rho$, то

$$\dim L = n - \rho.$$

В случае $\rho < n$ можно выбрать $n - \rho$ неизвестных, построить $n - \rho$ линейно независимых решений и получить затем решения системы в виде линейных комбинаций этих $n - \rho$ линейно независимых решений.

2. Множество решений L $m \times n$-системы линейных уравнений $Ax = b$ состоит из всех упорядоченных n-последовательностей вида $x_0 + x^*$, причем x_0 — некоторое частное решение данной системы, а x^* пробегает значения всех решений соответствующей однородной системы $Ax = 0$:

$$L = \{x_0 + x^*, \text{ где } x_0 - \text{постоянный вектор такой, что } Ax_0 = b, \text{ а } Ax^* = 0.\}$$

(Для иллюстрации этой теоремы следует рассмотреть первый и последний из приведенных выше примеров.)

2.4.4.3.3. Способы решения линейных уравнений.

Алгоритм Гаусса. Нахождение множества решений системы линейных уравнений основывается на том, что от заданной системы при помощи эквивалентных преобразований переходят к системе, которая решается «проще», чем исходная система, и эквивалентна заданной. Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

1) перемена местами двух уравнений в системе;

2) умножение какого-либо уравнения системы на действительное число $c \neq 0$;

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти эквивалентные преобразования системы линейных уравнений $Ax = b$ вызывают в матрице коэффициентов A и в расширенной матрице коэффициентов $(A \mid B)$ только преобразования, сохраняющие ранг, а именно приводят к перестановке строк, умножению строки на число, отличное от нуля, и прибавлению к одной строке другой, умноженной на произвольное число. Справедливо также обратное: если преобразовать матрицы A и $(A \mid b)$ в матрицы A' и $(A' \mid b')$ соответственно равных рангов, применяя к строкам допустимые преобразования строк (см. 2.4.4.2.3), сохраняющие ранг, то системы

$$Ax = b \text{ и } A'x = b'$$

будут эквивалентными. *Алгоритм Гаусса* состоит в том, чтобы получить матрицы A' и $(A' \mid b')$ трапециевидной формы.

В случае, если исходная система $Ax = b$ разрешима (пусть $\text{rang}(A) = \text{rang}(A \mid b) = \rho$), вследствие трапециевидности матриц A' и $(A' \mid b')$ эквивалентная система $A'x = b'$ может быть записана

в виде

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1\rho}x_\rho = b'_1 - a'_{1,\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a'_{1n}x_n,$$

$$a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2\rho}x_\rho = b'_2 - a'_{2,\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a'_{2n}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a'_{\rho\rho}x_\rho = b'_\rho - a'_{\rho,\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a'_{\rho n}x_n.$$

Эту систему называют *треугольной* системой. Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\,|\,b) = \rho$, то множество решений есть $(n-\rho)$-мерное многообразие; следовательно, $n-\rho$ неизвестных $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ можно выбрать произвольно: $x_{\rho+1} = \lambda_1$, $x_{\rho+2} = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_{n-\rho}$; остальные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ получаются из треугольной системы последовательно как функции параметров λ_i:

$$x_k = f_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-\rho}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Если для получения трапециевидных матриц A' или $(A'\,|\,b')$ требуется еще перестановка столбцов, то этого достигают перенумерацией неизвестных в системе уравнений $Ax = b$.

Примеры. 1)

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \qquad &= -1,\\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7,\\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8. \end{aligned}$$

Здесь

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1\\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7\\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5\\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Из этого заключаем:

а) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A\,|\,b)$, т. е. система разрешима;

б) решение неоднозначно: $4-2=2$ неизвестных могут быть выбраны произвольно;

в) треугольная система имеет вид

$$x_1 - 4x_2 = -1 - 2x_3, \quad x_2 = -1 + x_3 + x_4.$$

Если положить $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, то получим $x_2 = -1 + \lambda_1 + \lambda_2$, $x_1 = -5 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2$, т. е. множество решений $L = \{(-5, -1, 0, 0) + \lambda_1(2, 1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 0, 1);\ \lambda_i,\ i = 1, 2$ — произвольные действительные числа$\}$. Тогда соответствующая однородная система $Ax = 0$ имеет, очевидно, множество решений $L = \{\lambda_1(2, 1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 0, 1);\ \lambda_i$ — произвольные действительные числа$\}$.

2)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2,\\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8,\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Тогда

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 7 & 4 & 8\\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 11 & 10 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Здесь произведена перестановка трех первых столбцов.) Отсюда заключаем: $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\operatorname{rang}(A\,|\,b) = 3$; следовательно, система неразрешима: $L = \varnothing$.

3)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 12,\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 13,\\ 3x_2 + 4x_3 &= 5,\\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 &= -20. \end{aligned}$$

Здесь

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12\\ 2 & 3 & -1 & 13\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ -3 & 1 & 4 & -20 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & 5 & -3 & -11\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -2 & 7 & 16 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & -2 & 7 & 16\\ 0 & 0 & 29 & 58\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & -2 & 7 & 16\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда заключаем:

а) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A\,|\,b) = 3$, т. е. система уравнений разрешима;

б) решение единственно;

в) треугольная система имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 12,\\ -2x_2 + 7x_3 &= 16,\\ x_3 &= 2, \end{aligned}$$

откуда найдем $L = \{(9, -1, 2)\}$. Соответствующая однородная система $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение.

Правило Крамера. Если мы имеем частный случай $n \times n$-системы линейных уравнений $Ax = b$ такой, что $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A\,|\,b) = n$, то вследствие невырожденности A единственное решение x можно представить в виде $x = A^{-1}b$. Воспользовавшись формулами для обратной матрицы из 2.4.4.2.4, получим

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \\ b_n \end{bmatrix},$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. Тогда i-я координата x_i находится по формуле

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{1i}b_i + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_m) = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i}{D},$$

$$1 \ \ldots \ i \ \ldots \ n$$

где определитель D_i, стоящий в числителе, получается из $D = \det A$ заменой i-го столбца на столбец b. Следовательно, для $n \times n$-системы линейных уравнений $Ax = b$ такой, что $D = \det A \neq 0$, получим единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где $x_i = D_i/D$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2,\\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3\\ -2 & -2 & 1\\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&9&3\\1&-2&1\\3&7&2\end{vmatrix}=26,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&1&9\\1&-2&-2\\3&2&7\end{vmatrix}=39,$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{13}{13}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{26}{13}=2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{39}{13}=3.$$

2.4.4.4. Линейные преобразования.

2.4.4.4.1. Основные понятия.

2.4.4.4.1.1. Понятие линейного преобразования. Пусть V и V' – действительные векторные пространства. Однозначное отображение φ пространства V в пространство V' называется *линейным преобразованием V в V'*, если выполняются условия:

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ для любых $x,\ y\in V$;

2) $\varphi(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot\varphi(x)$ для любого $x\in V$ и всех действительных λ.

(При этом операции в V' могут быть определены иначе, чем в V, хотя из соображений простоты они обозначаются теми же знаками «+» и «·».)

Если $V=V'$, то φ: $V\to V'$ называют также *линейным оператором в V* или *линейным преобразованием* пространства V.

Если $x'=\varphi x$, то x' называется *образом* (*изображением*) x при отображении φ, x – *прообразом* (или *оригиналом*) x' при преобразовании φ, а множество $\{x\in V\mid \varphi x=x'\}$ называется *полным прообразом* (или *полным оригиналом*) элемента x' при преобразовании φ. Если M есть подмножество из V, то $\varphi M=\{x'\in V'\mid x'=\varphi(x),\ x\in M\}$ называют *множеством образов элементов из M* (*образом множества M*) при преобразовании φ. Если M' – подмножество из V', то $M=\{x\in V\mid \varphi x\in M'\}$ называется *полным прообразом* множества M' при преобразовании φ.

Примеры. 1) Преобразование φ_1: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ такое, что $\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1,\ x_2)$, линейно.

2) Преобразование φ_2 пространства $\mathbf{R}^n$ в векторное пространство многочленов не выше $(n-1)$-й степени такое, что $\varphi_2(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=x_1+x_2t+x_3t^2+\dots+x_nt^{n-1}$, линейно.

3) Преобразование φ_3 векторного пространства $\mathbf{C}^\infty$ бесконечно дифференцируемых функций в себя такое, что $\varphi_3 f=f'$ для всех $f\in\mathbf{C}^\infty$, линейно: φ_3 есть линейный оператор в $\mathbf{C}^\infty$.

4) Преобразование φ_4: $V\to V'$ такое, что $\varphi_4x=0'$ для любого $x\in V$ ($0'$ есть нулевой вектор из V'), линейно; его называют *нулевым преобразованием*.

5) Преобразование φ_5: $R^3\to R^2$ такое, что $\varphi_5(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1,\ 1)$, не является линейным, так как

$$\varphi_5(x_1,\ x_2,\ x_3)+\varphi_5(y_1,\ y_2,\ y_3)=(x_1,\ 1)+(y_1,\ 1)=$$
$$=(x_1+y_1,\ 2)\neq(x_1+y_1,\ 1)=\varphi_5[(x_1,\ x_2,\ x_3)+(y_1,y_2,y_3)].$$

2.4.4.4.1.2. Свойства линейных преобразований. Для каждого линейного преобразования φ: $V\to V'$ имеем:

1. Образ нулевого вектора 0 пространства V всегда является нулевым вектором $0'$ в V': $\varphi 0=0'$.

2. Линейная комбинация элементов из V всегда преобразуется в линейную комбинацию соответствующих элементов из V' с теми же коэффициентами. Поэтому для каждого подмножества $M\subseteq V$ образ линейной оболочки $\mathscr{L}(M)$ совпадает с линейной оболочкой $\mathscr{L}(\varphi M)$ образа множества M: $\varphi\mathscr{L}(M)=\mathscr{L}(\varphi M)$.

Если, в частности, B является базисом V, то $\varphi V=\varphi\mathscr{L}(B)=\mathscr{L}(\varphi B)$. Отсюда следует, что линейное преобразование φ: $V\to V'$ однозначно определено уже множеством образов φB базиса B.

3. Если S – линейно зависимое множество векторов из V, то φS – также линейно зависимое множество векторов пространства V'. С другой стороны, линейно независимые множества посредством преобразования φ могут перейти в линейно зависимые множества. Поэтому образ базиса B пространства V в общем случае – лишь порождающая система пространства φV.

4. Если U – векторное подпространство из V, то φU есть векторное подпространство из V'. Если V конечномерно, то размерность $\dim\varphi V$ пространства образов φV называют *рангом* линейного преобразования φ: $\operatorname{rang}\varphi=\dim\varphi V$.

5. Если U' – векторное подпространство пространства φV и U – полный прообраз U' по отношению к φ, то U является векторным подпространством в V.

Свойства 3–5 означают, что линейное преобразование сохраняет свойство линейной зависимости, а свойство быть подпространством сохраняется как у образов, так и у прообразов.

В частности, вследствие свойства 5 множество K_φ всех тех векторов из V, образом которых при преобразовании φ является нулевой вектор из V', образует векторное подпространство пространства V, называемое *ядром* K_φ линейного преобразования φ: $\operatorname{Ker}\varphi=K_\varphi$, где $K_\varphi=\{x\in V\colon\ \varphi x=0'\}$. Если K_φ конечномерно, то его размерность называют *дефектом* линейного преобразования φ: $\operatorname{Defekt}\varphi=\dim K_\varphi$. Если φ: $V\to V'$ и V – конечномерное векторное пространство, то

$$\operatorname{rang}\varphi+\operatorname{Defekt}\varphi=\dim V.$$

Примеры. Для примеров 1)–4) линейных преобразований имеем (см. 2.4.4.4.1.1):

$K_{\varphi_1}=\{(0,\ 0,\ x_3);\ x_3$ – любое действительное число$\}$; $\operatorname{Defekt}\varphi_1=1$; $\operatorname{rang}\varphi_1=2$.

$K_{\varphi_2}=\{(0,\ 0,\ \dots,\ 0)\}$; $\operatorname{Defekt}\varphi_2=0$; $\operatorname{rang}\varphi_2=n$.

$K_{\varphi_3}=\{f\colon f=\text{const}\}$; $\operatorname{Defekt}\varphi_3=1$; $\operatorname{rang}\varphi_3$ не определен (так как C^∞ бесконечномерно).

$K_{\varphi_4}=V$; если V конечномерно, то $\operatorname{Defekt}\varphi_4=\dim V$; $\operatorname{rang}\varphi_4=0$.

Ядро линейного преобразования позволяет ввести разбиение пространства V на классы элементов, имеющих одинаковые образы: два элемента из V принадлежат к одному и тому же классу, т. е. имеют один и тот же образ при преобразовании φ, тогда и только тогда, когда их разность принадлежит ядру φ.

2.4.4.4.1.3. Взаимно однозначные линейные преобразования. Линейное преобразование φ: $V\to V'$ называется *взаимно однозначным*, если из $\varphi x=\varphi y$ следует $x=y$. Взаимно однозначный линейный оператор из V в V называется также *невырожденным оператором* в пространстве V; остальные операторы называются *вырожденными операторами*.

В соответствии с этим из приведенных примеров линейных преобразований взаимно однозначным является лишь φ_2; φ_1 таковым, например, не является, так как $\varphi_1(1,\ 1,\ 1)=\varphi_1(1,\ 1,\ 5)$, хотя $(1,\ 1,\ 1)\neq(1,\ 1,\ 5)$.

Для любого линейного преобразования φ: $V \to V'$ следующие высказывания попарно эквивалентны:

1) φ взаимно однозначно;

2) для каждого линейно независимого множества S пространства V множество φS есть линейно независимое множество пространства V';

3) $K_\varphi = \{0\}$.

Из 2), в частности, следует, что образ базиса V при взаимно однозначном преобразовании φ является базисом φV. Для конечномерного векторного пространства V и взаимно однозначного преобразования φ имеем $\dim \varphi V = \dim V$.

2.4.4.4.2. Представление линейных преобразований с помощью матриц. Пусть V и V' – конечномерные векторные пространства, $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – базис V, $B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – базис V'.

Всякое линейное преобразование φ: $V \to V'$ образами $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$ векторов базиса B определено однозначно, так как каждый вектор $x \in V$ есть линейная комбинация векторов B и вследствие этого его образ φx есть соответствующая линейная комбинация векторов базиса φB. Если записать образы $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$ векторов B в координатах базиса B', то φ будет определяться однозначно посредством $m \cdot n$ координат векторов φa_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ относительно B', которые можно расставить в $m \times n$-матрице A так, чтобы k-й столбец матрицы A состоял из координат вектора φa_k относительно B'. И наоборот, каждой $m \times n$-матрице A по отношению к фиксированной паре базисов (B, B') можно единственным образом сопоставить линейное преобразование φ: $V \to V'$, если рассматривать столбцы A как координаты образов векторов B относительно B'.

Итак, между множествами линейных преобразований φ: $V \to V'$, где $\dim V = n$, $\dim V' = m$, и множеством $m \times n$-матриц существует взаимно однозначное соответствие при фиксированных базисах B пространства V и B' пространства V'. Если $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\varphi a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})_{B'}$, то φ можно записать в виде матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(Так как A зависит еще и от выбранной пары базисов (B, B'), то точнее было бы написать $A_{(B, B')}$.)

Пример. Пусть линейное преобразование φ: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ задано образами векторов базиса B пространства $\mathbf{R}^4$:

$$\varphi(1, -2, 0, 3) = (-9, 7, 1), \quad \varphi(0, 0, 1, -1) = (3, -3, 3),$$

$$\varphi(1, 0, 3, 0) = (4, 0, -2), \quad \varphi(1, -1, 1, 0) = (0, 1, -1).$$

(Координаты относятся к каноническому базису пространства $\mathbf{R}^4$ и соответственно к каноническому базису пространства $\mathbf{R}^3$.) Тогда, найдя φ-образы векторов e_1, e_2, e_3, e_4 канонического базиса пространства $\mathbf{R}^4$ и записав их координаты относительно канонического базиса пространства $\mathbf{R}^3$ (ср. 2.4.4.1.4), получим матрицу A, описывающую преобразование φ по отношению к паре канонических базисов. Для этого выразим e_i в виде линейных комбинаций векторов заданного базиса B и найдем φe_i в виде соответствующих линейных комбинаций заданных векторов φB. Записав координаты векторов φe_i относительно канонического базиса, окончательно получим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если перейти от пары базисов (B, B') к новой паре базисов $(\bar{B}, \bar{B}')$, то описывающая φ матрица $A_{(B, B')}$ перейдет в матрицу

$$A_{(\bar{B}, \bar{B}')} = T^{-1} A_{(B, B')} S,$$

причем столбцы матрицы S (соответственно T) будут состоять из координат векторов $\bar{B}$ относительно B (соответственно $\bar{B}'$ относительно B').

Матрицы одинакового размера, которые получаются одна из другой право- и левосторонним умножением на невырожденные матрицы, называются *эквивалентными*. Эквивалентность матриц есть отношение эквивалентности, которое разбивает множество матриц одинакового размера на классы эквивалентных матриц. Число этих классов равно $\min(m, n) + 1$, где $m \times n$ – размер рассматриваемых матриц.

Вследствие этого две матрицы, описывающие одно и то же линейное преобразование относительно различных пар базисов, эквивалентны. Обратно, эквивалентные матрицы относительно соответствующих пар базисов задают одно и то же линейное преобразование.

Линейному преобразованию φ: $V \to V'$ соответствует единственный класс эквивалентных матриц.

Если $V = V'$, т. е. если φ – линейный оператор в V, то для двух матриц A_B и $A_{\bar{B}}$, описывающих линейный оператор φ относительно различных базисов B, $\bar{B}$, вследствие $B = B'$ и $\bar{B} = \bar{B}'$ выполняется равенство

$$A_{\bar{B}} = S^{-1} A_B S.$$

Квадратные матрицы A_1 и A_2, для которых $A_2 = S^{-1} A_1 S$, где S – невырожденная матрица, называются *подобными*. Подобие матриц есть также отношение эквивалентности.

Аналогично сформулированному выше можно утверждать: линейному оператору φ в пространстве V соответствует единственный класс подобных матриц.

Свойства всех матриц одного и того же класса эквивалентности или одного и того же класса подобия тесно связаны со свойствами линейных преобразований, описываемых этими матрицами. Укажем некоторые из них:

1. Если φ: $V \to V'$ – линейное преобразование и $A_{(B, B')}$ – матрица, описывающая φ относительно пары базисов (B, B'), то для образа φx элемента $x \in V$ справедливо соотношение

$$(\varphi x)_{B'} = A_{(B, B')} x_B,$$

где x_B – вектор-столбец, составленный из координат вектора x относительно B, $(\varphi x)_{B'}$ – вектор-столбец, составленный из координат вектора φx относительно B'.

По этой формуле наряду с образом можно определить также полные прообразы, что сводится к отысканию решения системы линейных уравнений (см. 2.4.4.3).

2. Все матрицы класса эквивалентности, соответствующего линейному преобразованию φ: $V \to V'$ $(V \neq V')$, имеют одинаковый ранг, и $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang} \varphi$ для всех A из класса эквивалентности, соответствующего φ.

3. Все матрицы класса подобия, соответствующего линейному оператору φ в пространстве V, имеют одинаковый ранг, одинаковый определитель, одинаковый след, одинаковый характеристический многочлен и одинаковые собственные значения (см. 2.4.4.5).

В частности, линейный оператор невырожден тогда и только тогда, когда матрицы определяемого им класса подобия невырождены.

2.4.4.4.3. Операции над линейными преобразованиями. Если φ: $V \to V'$, φ': $V \to V'$, ψ: $V' \to V''$ суть линейные преобразования, то определим

сумму $\varphi + \varphi'$: $V \to V'$ как $(\varphi + \varphi')\,x = \varphi x + \varphi' x$ для любого $x \in V$;

произведение φ на число α, т. е. $\alpha\varphi$: $V \to V'$ (α – действительное), как $(\alpha\varphi)\,x = \alpha\,(\varphi x)$ для любого $x \in V$;

произведение $\psi\varphi$: $V \to V''$ как $(\psi\varphi)\,x = \psi\,(\varphi x)$ для любого $x \in V$ (*последовательное выполнение*, или *композиция*, линейных преобразований).

Преобразования $\varphi + \varphi'$, $\alpha\varphi$ и $\psi\varphi$ также являются линейными преобразованиями.

Если V, V', V'' – конечномерные векторные пространства с базисами B, B', B'' и линейные преобразования φ, φ', ψ заданы соответственно матрицами $A_{(B,B')}$, $A'_{(B,B')}$, $C_{(B',B'')}$, то:

линейное преобразование $\varphi + \varphi'$ относительно (B, B') задается матрицей $A + A'$;

линейное преобразование $\alpha\varphi$ относительно (B, B') задается матрицей αA;

линейное преобразование $\psi\varphi$ относительно (B, B'') задается матрицей CA.

Так как операциям над линейными преобразованиями соответствуют аналогичные операции над задающими их матрицами, то множество линейных преобразований пространства V в V' имеет такую же структуру, как и множество матриц, задающих эти преобразования. Отсюда следует:

1. Множество линейных преобразований V в V' с определенными на нем действиями сложения и умножения на действительные числа образует векторное пространство.

2. Множество линейных операторов пространства V с определенными в нем действиями сложения и умножения образует кольцо.

2.4.4.4.4. Обратный оператор. Для невырожденных операторов φ: $V \to V$ можно поставить вопрос об *операторе* φ^{-1}, обратном к φ, т. е. таком, что $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$, где ε – тождественный оператор, т. е. такой, что $\varepsilon x = x$ для любого $x \in V$. Если $\varphi V = V$, то существует обратный к φ оператор φ^{-1}, определяемый следующим образом: $\varphi^{-1}x = y$ тогда и только тогда, когда $\varphi y = x$. Вследствие невырожденности φ оператор φ^{-1} определен однозначно, и можно показать, что φ^{-1} вновь является линейным оператором в пространстве V.

Предположение $\varphi V = V$ необходимо для того, чтобы каждый элемент из V можно было рассматривать как образ при преобразовании φ некоторого элемента из V. В случае конечномерного векторного пространства V это предположение всегда выполнено.

Если φ, ψ – невырожденные операторы в V такие, что $\varphi V = \psi V = V$, то

1) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, т. е. φ и φ^{-1} *взаимно обратны*;

2) $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$;

3) если V конечномерно и преобразование φ относительно базиса B задается матрицей A, то преобразование φ^{-1} относительно того же базиса задается матрицей A^{-1};

4) если V конечномерно, то множество невырожденных операторов пространства V по отношению к умножению образует группу.

2.4.4.5. Собственные значения и собственные векторы.

2.4.4.5.1. Собственные значения и собственные векторы матриц. Пусть A – $n \times n$-матрица. Любой вектор $x \in V^n$, $x \neq 0$, для которого $Ax = \lambda x$, где λ – некоторое число, называется *собственным вектором* A, а λ – принадлежащим или соответствующим ему *собственным значением матрицы* A.

Уравнение $Ax = \lambda x$ эквивалентно уравнению $(A - \lambda E)\,x = 0$. Это однородная система линейных уравнений, нетривиальные решения которой являются искомыми собственными векторами. Она имеет нетривиальные решения только тогда, когда $\operatorname{rang}(A - \lambda E) < n$, т. е. если $\det(A - \lambda E) = 0$.

Многочлен $\det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ – *характеристическим уравнением* матрицы A; его решения являются собственными значениями матрицы A. Если λ_i – собственные значения A, то нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda_i E)\,x = 0$ суть собственные векторы A, принадлежащие собственному значению λ_i. Множество решений этой системы уравнений называют *собственным подпространством матрицы* A, принадлежащим собственному значению λ_i; каждый вектор $x \neq 0$ собственного подпространства является собственным вектором матрицы A (само собой разумеется, в собственном подпространстве определены линейные операции «+» и «·»).

Примеры. 1) Собственные значения матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ найдем из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Собственное подпространство A, принадлежащее $\lambda_1 = 5$, есть множество решений системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)\,x = 0 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x,$$

т. е. $L_1 = \{\mu\,(-1,\ 1);\ \mu$ – действительное число$\}$.

Аналогично найдем собственное подпространство, принадлежащее $\lambda_2 = -1$: $L_2 = \{\mu\,(1,\ 2);\ \mu$ – действительное число$\}$.

2) Матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ и, следовательно, собственные значения $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. Действительных собственных векторов нет. Над комплексным полем собственному значению λ_1 принадлежат собственные векторы $x_1 = \mu\,(1, i - 1)$, а собственному значению λ_2 – собственные векторы $x_2 = \mu\,(-1, i + 1)$; здесь μ – произвольное комплексное число, не равное нулю.

3) Матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; отсюда получаем собственное подпространство $L_1 = L_2 = \{\mu\,(1,\ 1);\ \mu$ – произвольное действительное число$\}$.

2.4.4.5.2. Теоремы о собственных значениях и собственных векторах.

1. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены и, следовательно, одинаковые собственные значения.

2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, то

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Это можно использовать как необходимый критерий правильности вычисления собственных значений. Далее, из того, что $\det A = \prod \lambda_i$, следует, что матрица A невырождена только тогда, когда нуль не является собственным значением A.

3. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – (попарно) различные собственные значения матрицы A и $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – соответствующие им собственные векторы (λ_i принадлежит x_i), то $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ есть линейно независимое множество векторов.

4. Если матрица A имеет собственное значение λ, то для любых чисел $c_0, c_1, \ldots, c_k$ матрица $B = \sum_{i=0}^{k} c_i A^i$ (здесь $A^1 = A$ и $A^0 = E$) имеет собственное значение $\sum_{i=0}^{k} c_i \lambda^i$. Отсюда, в частности, следует: если A имеет собственное значение λ, то A^m (m – натуральное число) имеет собственное значение λ^m. Для невырожденной матрицы A это высказывание справедливо и при целых отрицательных числах m, если положить $A^m = A^{-k} = (A^{-1})^k$ (где $k = -m$ есть натуральное число).

5. Каждая матрица A удовлетворяет собственному характеристическому уравнению, т. е. если $\sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ – характеристический многочлен A, то $\sum_{i=0}^{n} c_i A^i = 0$ (*теорема Гамильтона – Кэли*).

Для определенных классов матриц справедливы частные предложения:

1. Все собственные значения симметрической матрицы действительны.

2. Собственные пространства, принадлежащие различным собственным значениям симметрической матрицы, взаимно ортогональны.

3. Все собственные значения ортогональной матрицы по модулю равны единице.

4. Собственным значением ортогональной матрицы наряду с λ является также λ^{-1}.

2.4.4.5.3. Применение теории собственных значений.

2.4.4.5.3.1. Задача о нормальной форме для линейных операторов. Пусть φ: $V \to V'$ ($V \neq V'$) – линейное преобразование конечномерных векторных пространств и A – матрица, описывающая φ относительно пары базисов (B, B') (см. 2.4.4.4.2). Вопрос состоит в том, можно ли надлежащим выбором пары базисов найти матрицу, описывающую φ и имеющую особенно простой, а именно диагональный (отличными от нуля могут быть только элементы главной диагонали), вид. Так как линейному преобразованию φ сопоставлен единственный класс эквивалентных матриц, то вопрос можно поставить так: существует ли в каждом классе эквивалентности матрица диагонального вида? Оказывается, существует: если $\operatorname{rang} \varphi = r$, то всегда можно построить такую пару базисов, что матрица, задающая φ, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

(здесь r элементов главной диагонали равны единице, остальные равны нулю).

Если поставить тот же самый вопрос по отношению к линейным операторам в пространстве V, то ответ получить гораздо труднее, так как в этом случае можно «варьировать» уже не два базиса (в V и V'), а только один (в V). В этом случае справедливо следующее утверждение. Линейный оператор φ: $V \to V$ относительно базиса $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ описывается диагональной матрицей тогда и только тогда, когда базисные векторы обладают свойством $\varphi a_i = \lambda_i a_i$, где λ_i – некоторые действительные числа. Эти числа λ_i и являются элементами диагональной матрицы.

Всякий вектор $x \neq 0$, для которого $\varphi x = \lambda x$, где λ – некоторый скаляр, называется *собственным вектором* линейного оператора φ, а λ – *собственным значением* оператора φ, принадлежащим этому собственному вектору.

Следовательно, линейный оператор φ относительно базиса B описывается диагональной матрицей тогда и только тогда, когда базисными векторами являются собственные векторы, и вся постановка задачи сводится к вопросу о существовании базиса из собственных векторов оператора φ. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов, т. е. для того, чтобы линейный оператор φ имел n линейно независимых собственных векторов, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора φ были действительными и для каждого собственного значения λ кратности ρ выполнялись равенства

$$\operatorname{rang}(\varphi - \lambda\varepsilon) = \operatorname{rang}(A - \lambda E) = n - \rho,$$

где A – какая-либо матрица, задающая φ. Это означает, что собственное подпространство, принадлежащее собственному значению кратности ρ, должно иметь размерность ρ (чтобы для ρ совпадающих собственных значений получить ρ линейно независимых собственных векторов).

Поставленная проблема не всегда разрешима, так как не обязательно все собственные значения линейного оператора должны быть действительными и может случиться, что для кратных собственных значений нельзя получить требуемого числа линейно независимых собственных векторов. Однако симметрический оператор в евклидовом векторном пространстве всегда может быть описан диагональной матрицей относительно подходящего ортонормированного базиса, так как всегда можно получить ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов симметрического оператора. (Линейный оператор φ в евклидо-

вом векторном пространстве V называется *симметрическим*, если $(\varphi x, y) = (x, \varphi y)$ для всех $x, y \in V$.)

Вычисление собственных значений и собственных векторов линейного оператора φ производится путем определения собственных значений и собственных векторов какой-либо матрицы оператора φ.

2.4.4.5.3.2. Приведение матрицы к диагональному виду. Задача состоит в том, чтобы для $n \times n$-матрицы A подобрать такую матрицу C, чтобы матрица $A' = C^{-1}AC$ имела диагональный вид. Эта задача тесно связана с задачей о нормальной форме линейных операторов. Если относительно базиса B линейный оператор φ в пространстве V описывается матрицей A_B, то ищем базис B', по отношению к которому описывающая φ матрица $A_{B'}$ имеет диагональный вид. Так как матрицы A_B и $A_{B'}$ должны быть подобны, то эта задача сводится к отысканию такой матрицы C, чтобы матрица $A_{B'} = C^{-1}A_BC$ имела диагональный вид. Если задача разрешима, то B' должен состоять из собственных векторов оператора φ, т. е. столбцами искомой матрицы C должны быть координаты собственных векторов, образующих базис B'.

Задача всегда разрешима, если матрица A симметрическая, так как тогда все собственные значения действительны и размерность собственного подпространства, принадлежащего собственному значению λ, совпадает с кратностью λ. Вследствие ортогональности собственных подпространств, принадлежащих различным собственным значениям, для симметрических матриц A всегда можно найти такую ортогональную матрицу C, что $C^{-1}AC = C^TAC$ имеет диагональный вид.

Пример. Для того чтобы привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

найдем сначала ее собственные значения: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$; отсюда получаются собственные пространства:

$L_1 = \{\mu(1, -1, 2);\ \mu$ — действительное$\}$,

$L_2 = \{\mu_1(1, 1, 0) + \mu_2(-2, 0, 1);\ \mu_1, \mu_2$ — действительные$\}$.

Далее получаем ортонормированную систему собственных векторов:

$$\left\{\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -1, 2);\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0);\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)\right\}.$$

Таким образом, посредством $C = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

матрица A преобразуется в $A' = C^TAC = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4.4.5.3.3. Преобразование квадратичных форм к главным осям. Под *квадратичной формой* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ понимают выражение вида x^TAx, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $A = \| a_{ik} \|$ — симметрическая матрица, a_{ik} — действительные числа. Матрица A называется *матрицей квадратичной формы*.

Например, $\Phi = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2$ является квадратичной формой, так как

$$\Phi = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^TAx.$$

Постановка задачи такова: найти такую ортогональную матрицу C, чтобы после введения новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при помощи уравнения $x = Cy$ данная квадратичная форма содержала только слагаемые с квадратами текущих координат: $x^TAx \xrightarrow[x = Cy]{} \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$. Такой вид квадратичной формы называют *каноническим*.

После замены переменных $x = Cy$ форма x^TAx переходит в форму $y^T(C^TAC)y$, которая должна содержать только слагаемые с квадратами переменных. Таким образом, задача равнозначна следующей: найти ортогональную матрицу C такую, чтобы матрица C^TAC имела диагональный вид. Это всегда возможно для симметрической матрицы A, если в качестве столбцов искомой матрицы C выбрать ортонормированную систему собственных векторов матрицы формы A. Тогда посредством замены $x = Cy$ квадратичная форма приводится к виду $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$, где λ_i — собственные значения матрицы A с учетом кратности. Собственные векторы матрицы A, стоящие в столбцах C, называются *главными осями* квадратичной формы, а процесс преобразования квадратичной формы в ее каноническую форму называется *приведением к главным осям* или *приведением к каноническому виду*.

Каноническая форма определяется однозначно с точностью до нумерации переменных y_i.

Пример. Для того чтобы квадратичную форму $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ привести к каноническому виду, вычислим собственные значения и соответствующие собственные подпространства матрицы $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Получим $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$; $L_1 = \{\mu(2, 2, -1)\}$, $L_2 = \{\mu(-1, 2, 2)\}$, $L_3 = \{\mu(2, -1, 2)\}$. Так как собственные значения попарно различны, то соответствующие им векторы попарно ортогональны, и, чтобы получить ортонормированную матрицу, их нужно только пронормировать. Заменой $x = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} y$ заданная форма приводится к каноническому виду $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$.

Если все собственные значения симметрической матрицы A положительны (все отрицательны, все неотрицательны, все неположительны), то для всех $x \neq 0$ квадратичная форма x^TAx положительна (соответственно отрицательна, неотрицательна, неположительна) *).

Пример. Для действительных чисел x_1, x_2, x_3 таких, что $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, справедливо неравенство $3x_1^2 + 10x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_2x_3 > 4x_2^2 - 2x_1^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2$, так как в этом случае $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 > 0$, ибо матрица полученной квадратичной формы имеет только положительные собственные значения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Критерий положительной определенности квадратичной формы (критерий Сильвестра) приведен в 3.1.6.6.

*) Квадратичная форма в первом и втором случаях называется *определенной* (*положительно определенной* или *отрицательно определенной*) и в двух других случаях — *положительно* или *отрицательно полуопределенной*.

2.5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

К элементарным функциям относятся рациональные функции, степенные функции, тригонометрические функции и обратные к ним, показательные и логарифмические функции, гиперболические функции и обратные к ним, а также функции, представимые в виде суммы, разности, произведения, отношения или суперпозиции перечисленных функций («функции, заданные формулами», т. е. представимые в виде аналитического выражения, причем областью определения элементарной функции является множество всех чисел, для которых ее аналитическое выражение имеет смысл).

К неэлементарным функциям относятся, например:

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ для рациональных } x\\ 0 \text{ для иррациональных } x\end{cases}$$

(*функция Дирихле*): функция $y=[x]$ (*целая часть от* x), т. е. y равно наибольшему целому числу, не превосходящему x: функция $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$: функция $y=\int\limits_0^x\dfrac{\sin x}{x}dx$ (*интегральный синус*): функция $y=\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ (*гамма-функция*).

2.5.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.5.1.1. Целые рациональные функции.

2.5.1.1.1. Определение целой рациональной функции. Функция f называется *целой рациональной функцией* (или *многочленом*), если она может быть представлена в виде

$$y=f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}x^i \tag{2.23}$$

для любого x (из области определения *)); числа a_0, a_1, ..., a_n действительны (или комплексны); $a_0\neq 0$; $n\in\mathrm{N}$ (или $n=0$). Правая часть называется *многочленом* (относительно переменного x), числа a_i – *коэффициентами многочлена*, число n – *степенью целой рациональной функции* (или *степенью многочлена*). Представление (2.23) единственно, т. е. функции

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k,\qquad g(x)=\sum_{k=0}^{m}b_{n-k}x^k$$

равны тогда и только тогда, когда $m=n$ и $a_k=b_k$ для $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Выражение (2.23) называется *канонической формой* представления целой рациональной функции. Многочлен степени 1 называется *линейным*.

Примеры. 1) $f_1(x)=c$ – постоянная функция, степень f_1 равна 0.

2) $f_2(x)=x$, степень f_2 равна 1.

3) $f_3(x)=(7x+1)(3x+5)$, степень f_3 равна 2.

4) $f_4(x)=\sqrt{13}\,x^2-2\sqrt[3]{7}\,x^3+\cos\frac{\pi}{5}\cdot x$, степень f_4 равна 3.

*) Если для функции f, заданной аналитическим выражением, область определения не задана явно, то под этим всегда следует понимать множество всех действительных чисел x_0, для которых аналитическое выражение $y=f(x)$ дает действительное число $f(x_0)$.

Графики целых рациональных функций для некоторых частных случаев приведены в 1.2.1.1.

2.5.1.1.2. Разложение на линейные множители. Многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k$, $n\geqslant 1$, называется *приводимым*, если он может быть представлен в виде произведения многочленов низших степеней; в противном случае он называется *неприводимым*.

Многочлены нулевой степени (константы) не являются ни приводимыми, ни неприводимыми; многочлены первой степени всегда неприводимы. Возможность разложения на множители многочленов степени, большей единицы, зависит от выбора области определения коэффициентов, которая, в общем, не обязательно совпадает с множеством действительных чисел.

Пример. Многочлен x^4-7 неприводим, если считать, что коэффициенты многочленов должны быть рациональными числами. Если же в качестве области определения коэффициентов взять множество действительных чисел, то $x^4-7=(x^2+\sqrt{7})(x^2-\sqrt{7})$. Если же допустить существование комплексных коэффициентов, то данный многочлен может быть разложен на линейные множители:

$$x^4-7=(x-i\sqrt[4]{7})(x+i\sqrt[4]{7})(x+\sqrt[4]{7})(x-\sqrt[4]{7}).$$

Основная теорема алгебры. Любая целая рациональная функция n-й степени с коэффициентами из множества комплексных чисел может быть разложена на $n+1$ сомножителей, один из которых имеет нулевую степень, а n множителей линейны с единичными коэффициентами при переменном:

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Здесь α_i – комплексные числа. Если a_0, a_1, ..., a_n – действительные числа, то для каждого линейного множителя $(x-\alpha_k)$ с комплексным α_k в разложении содержится линейный множитель $(x-\bar\alpha_k)$, где $\bar\alpha_k$ – число, комплексно сопряженное к α_k.

Если область определения коэффициентов сужена до множества действительных чисел, то любая целая рациональная функция n-й степени может быть разложена на множители первой и второй степени:

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots$$
$$\ldots(x-\alpha_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_lx+q_l), \tag{2.24}$$

где $2l+r=n$, а a_0, α_1, ..., α_r, p_1, ..., p_l, q_1, ..., q_l – действительные числа.

2.5.1.1.3. Корни целых рациональных функций. Число x_j называется *корнем* (*нулем*) целой рациональной функции f с действительными коэффициентами, если

$$f(x_j)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x_j^k=0.$$

Если x_1 является корнем целой рациональной функции f степени n, то существует целая рациональная функция f_1 степени $n-1$ такая, что для каждого x, принадлежащего множеству D области определения f, имеет место равенство $f(x)=(x-x_1)f_1(x)$. Если, помимо этого, корнями f являются числа x_2, x_3, ..., x_r, то существует

целая рациональная функция f_r степени $n-r$ $(r \leqslant n)$ такая, что для всех $x \in D$ имеет место равенство $f(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_r) f_r(x)$.

Число x_j называется *корнем кратности* k_j (или *корнем* k_j*-го порядка*), если существует целая рациональная функция f_{k_j} такая, что

$$f(x) = (x-x_j)^{k_j} f_{k_j}(x) \text{ и } f_{k_j}(x_j) \neq 0.$$

Учитывая кратность корней, целую рациональную функцию f степени n можно представить в виде

$$f(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_s)^{k_s} g(x), \quad (2.25)$$

где $\sum\limits_{j=1}^{s} k_j = r$, $g(x)$ – целая рациональная функция степени $n-r$. Из выражения (2.25) следует: целая рациональная функция степени n имеет не более n различных корней; если число корней равно n, то она может быть представлена в виде произведения n линейных множителей и одного множителя нулевой степени. Число корней (с учетом их кратности) является четным или нечетным в зависимости от того, является ли степень функции f четной или нечетной; если степень целой рациональной функции с действительными коэффициентами нечетна, то функция имеет по крайней мере один действительный корень.

Примеры. 1) $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Других действительных корней нет. Поэтому для этой функции существует представление $f(x) = (x+2)(x-3)(x^2+1)$.

2) $f(x) = x^8 - x^7 - 11x^6 + 11x^5 + 30x^4 - 58x^3 - 12x^2 + 88x - 48$ имеет корень $x_1 = 1$ кратности 2, корень $x_2 = 3$ (однократный) и корень $x_3 = -2$ кратности 3. Отсюда получаем разложение

$$f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+2)^3(x^2-2x+2).$$

Корни и графики функций. Каждому корню функции f однозначно соответствует точка пересечения (или точка касания, если порядок корня равен четному числу) графика функции с осью абсцисс. В точке, соответствующей однократному корню, график имеет наклон, отличный от нуля; в точке, соответствующей многократному корню, наклон равен нулю, т. е. касательная к графику в точках, соответствующих многократным корням, совпадает с осью абсцисс.

Вычисление корней. Вычисление корней целых рациональных функций сводится к решению алгебраических уравнений $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k = 0$ (см. 2.4.2.3).

2.5.1.1.4. Поведение целых рациональных функций на бесконечности. Поведение целой рациональной функции f степени n на бесконечности зависит:

1) от знака коэффициента a_0 при x^n;

2) от четности или нечетности n.

n	Четное		Нечетное	
a_0	$a_0 > 0$	$a_0 < 0$	$a_0 > 0$	$a_0 < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Из того, что целые рациональные функции непрерывны во всей своей области определения, следует, что любая целая рациональная функция четной степени всегда ограничена либо сверху, либо снизу, а целая рациональная функция нечетной степени не ограничена ни сверху, ни снизу.

2.5.1.1.5. Частные случаи. *Линейные функции* – это целые рациональные функции первой степени: $f(x) = a_0 x + a_1$, $a_0 \neq 0$. Они монотонно возрастают при $a_0 > 0$ и монотонно убывают при $a_0 < 0$. Графиками линейных функций являются прямые, которые пересекают координатные оси в точках $A(-a_1/a_0,\ 0)$ и $B(0,\ a_1)$ (см. 1.2.1.1).

Квадратичные функции – это целые рациональные функции второй степени: $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $a_0 \neq 0$. Преобразуя, получим

$$f(x) = a_0\left(x^2 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}\right) = a_0\left(\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{4a_0^2}\right)\right).$$

Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной $C\left(-\frac{a_1}{2a_0},\ a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}\right)$, которая своими ветвями направлена в сторону положительных $(a_0 > 0)$ или отрицательных $(a_0 < 0)$ ординат (см. 1.2.1.1).

Степенные функции (с положительным показателем степени) – это целые рациональные функции $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Графики этих функций симметричны относительно оси ординат при четном n и центрально симметричны относительно начала координат при нечетном n; они называются *параболами* n*-го порядка* (см. 1.2.1.1).

2.5.1.2. Дробно-рациональные функции.

2.5.1.2.1. Определение дробно-рациональной функции. Функция f называется *рациональной функцией*, если она представима в виде отношения двух целых рациональных функций $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. в виде

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_{m-j}x^j}, \quad (2.26)$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ (или $m, n = 0$). При $m = 0$ это целая рациональная функция. При $m > 0$ функция f называется *дробно-рациональной функцией*.

Примечание. Выражение (2.26) называется *канонической формой представления дробно-рациональной функции* f, если функции $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней. Если $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общие корни $x_1, \ldots, x_k$, то

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_k)P_1(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_k)Q_1(x)},$$

где целые рациональные функции $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ не имеют общих корней. Следовательно, их отношение $f_1(x) = P_1(x)/Q_1(x)$ является канонической формой представления функции f_1. Выражение $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ описывает функцию f, значения которой совпадают со значениями f_1 во всей области определения f_1, исключая точки x_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, в которых функция f не определена. Расширяя область опреде-

ления функции f, получим функцию f_2 такую, что

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\neq x_j,\\ \lim\limits_{x\to x_j} f(x), & \text{если } x=x_j \text{ и предел конечен}\end{cases}$$

$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$

Функция f_2 совпадает с функцией f_1.

Примеры.

1) $f_1(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-\sqrt{5}}$ (канонический вид).

2) $f_2(x)=\dfrac{2}{1-x}$ (канонический вид).

3) $f_3(x)=\dfrac{2x-6}{3x^2-6x-9}=\dfrac{2(x-3)}{3(x-3)(x+1)}$.

Дробно-рациональная функция $f(x)=P(x)/Q(x)$ называется *правильной* дробно-рациональной функцией, если степень многочлена $Q(x)$ больше, чем степень многочлена $P(x)$ (примеры 2) и 3)), и *неправильной* в противном случае (пример 1)). Последнюю, разделив числитель на знаменатель (см. 2.4.1.3), можно разложить на сумму, состоящую из целой рациональной функции и правильной дробно-рациональной функции.

Пример. $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+3}{x-1}=3x-1+\dfrac{2}{x-1}$.

2.5.1.2.2. Нули и полюсы дробно-рациональных функций. Действительное число x_j называется *нулем* или *корнем* рациональной функции $f(x)=P(x)/Q(x)$, представленной в канонической форме, если $P(x_j)=0$, а $Q(x_j)\neq 0$. Если при этом x_j является корнем кратности r многочлена $P(x)$, то x_j называется *корнем кратности* r функции $f(x)$. Таким образом, нахождение корней рациональных функций сводится к нахождению корней целых рациональных функций.

Действительное число x_i называется *полюсом* дробно-рациональной функции $f(x)=P(x)/Q(x)$, представленной в канонической форме, если $Q(x_i)=0$, а $P(x_i)\neq 0$. Если при этом x_i является корнем кратности r многочлена $Q(x)$, то x_i называется *полюсом порядка* r.

Пример. Правильная функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-8x-12}$ имеет два однократных корня $x_1=1$ и $x_2=-1$, полюсы $x_3=3$ (полюс 1-го порядка) и $x_4=-2$ (полюс 2-го порядка).

В окрестности полюса x_i значение функции растет неограниченно, т. е. $\lim\limits_{x\to x_i}|f(x)|=+\infty$; прямая $x=x_i$ является асимптотой графика этой функции.

О поведении дробно-рациональной функции в окрестности полюса x_i можно сделать вывод по знакам значений $f(x_i+\varepsilon)$ и $f(x_i-\varepsilon)$, где ε – достаточно малое положительное число.

Пример. $x_i=4$ является полюсом функции $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x}$; при малом $\varepsilon>0$

$$f(x_i+\varepsilon)=\frac{4+\varepsilon-1}{(4+\varepsilon)^2-4(4+\varepsilon)}=\frac{3+\varepsilon}{4\varepsilon+\varepsilon^2}>0,$$

$$f(x_i-\varepsilon)=\frac{4-\varepsilon-1}{(4-\varepsilon)^2-4(4-\varepsilon)}=\frac{3-\varepsilon}{-4\varepsilon+\varepsilon^2}<0.$$

2.5.1.2.3. Поведение дробно-рациональных функций на бесконечности. Если дробно-рациональная функция f задана в виде

$$f(x)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_{m-j}x^j},$$

где $a_0\neq 0$ и $b_0\neq 0$, то для всех $x\neq 0$

$$f(x)=\frac{x^n\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n-k}}{x^{n-k}}\right)}{x^m\left(\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{b_{m-j}}{x^{m-j}}\right)}=\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)},$$

где $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)=a_0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v(x)=b_0$. Таким образом, получаем:

а) При $m=n$

$$\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)}=\frac{u(x)}{v(x)};$$

следовательно,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{a_0}{b_0},$$

т. е. прямая $y=a_0/b_0$ является асимптотой графика функции f.

б) При $n<m$

$$\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)}=\frac{u(x)}{x^{m-n}v(x)};$$

следовательно,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{m-n}}\frac{u(x)}{v(x)}=0,$$

т. е. асимптотой является ось абсцисс.

в) При $n>m$

$$\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)}=\frac{x^{n-m}u(x)}{v(x)}.$$

Поведение функции на бесконечности зависит от знака дроби a_0/b_0 и от того, четно или нечетно число $n-m$. Для всех трех случаев, обозначив $a_0/b_0=c$, получаем следующую таблицу:

	$m=n$	$n<m$	$n>m$			
			$n-m$ четно		$n-m$ нечетно	
			$c>0$	$c<0$	$c>0$	$c<0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	c	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	c	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2.5.1.2.4. Степенные дробно-рациональные функции. Простейшими дробно-рациональными функциями являются степенные функции с целым отрицательным показателем

степени:
$$f(x) = x^n, \quad n = -1, -2, -3, \dots$$

Если n нечетно, то $(-x)^n = -(x^n)$, т. е. эти функции являются нечетными; графики их представляют собой кривые типа гиперболы, центрально симметричные относительно начала координат. Асимптотами этих графиков являются координатные оси. В точке $x = 0$ эти функции не определены. Степенные функции с четным (отрицательным) показателем степени являются четными функциями, т. е. $(-x)^n = x^n$. Их графики симметричны относительно оси ординат. Асимптотами этих графиков являются ось абсцисс и ось ординат (положительное направление). В точке $x = 0$ эти функции не определены.

Если в выражении (2.26) $m = 1$, $n \leqslant 1$, то получается дробно-линейная функция
$$f(x) = \frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2 (x + b_1/b_0)},$$
где $b_0 \neq 0$ и $a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0$. Функция f имеет корень $x_1 = -a_1/a_0$ (если $a_0 \neq 0$) и полюс $x_2 = -b_1/b_0$. При $x \to \pm\infty$ значения функции стремятся к a_0/b_0. Графиком функции f является равносторонняя гипербола, ветви которой расположены симметрично относительно точки $M\left(-\frac{b_1}{b_0}, \frac{a_0}{b_0}\right)$. (Графики дробно-рациональных функций см. в 1.2.1.2.)

2.5.1.2.5. Разложение дробно-рациональных функций на элементарные дроби. Для интегрирования рациональных функций в общем случае необходимо разложить их на сумму простейших рациональных дробей.

Если
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_{m-j} x^j},$$
где $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней, $n < m$ и $b_0 = 1$, то $f(x)$ единственным образом представляется в виде
$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_{11}}{(x - x_1)} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_{21}}{(x - x_2)} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{A_{s1}}{(x - x_s)} + \frac{A_{s2}}{(x - x_s)^2} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x - x_s)^{k_s}} + \\ & + \frac{B_{11} + C_{11}x}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \frac{B_{12} + C_{12}x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots \\ & \dots + \frac{B_{1l_1} + C_{1l_1}x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \frac{B_{21} + C_{21}x}{(x^2 + p_2 x + q_2)} + \\ & + \frac{B_{22} + C_{22}x}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{2l_2} + C_{2l_2}x}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2}} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{B_{r1} + C_{r1}x}{(x^2 + p_r x + q_r)} + \frac{B_{r2} + C_{r2}x}{(x^2 + p_r x + q_r)^2} + \dots \\ & \dots + \frac{B_{rl_r} + C_{rl_r}x}{(x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}}, \end{aligned} \qquad (2.27)$$
где k_i, l_j, r, s — натуральные числа; A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, q_j, p_j — действительные числа; x_i — корни функции $Q(x)$; кроме того, $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$ $(j = 1, 2, \dots, r)$.

Слагаемые в выражении (2.27) называются *элементарными* (*простейшими*) *дробями*.

Частные случаи.

1) Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет только однократные действительные корни, например $x_1, x_2, \dots, x_m$, то (2.27) имеет вид
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_m}{x - x_m}.$$

2) Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет действительные, но не обязательно однократные корни, например x_j — корень кратности k_j, то (2.27) имеет вид
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} =$$
$$= \sum_{j=1}^{k_1} \frac{A_{1j}}{(x - x_1)^j} + \sum_{j=1}^{k_2} \frac{A_{2j}}{(x - x_2)^j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_s} \frac{A_{sj}}{(x - x_s)^j}.$$

3) Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет также и комплексные, но только однократные корни, то (2.27) имеет вид
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{x - x_j} + \sum_{j=1}^{l} \frac{B_j + C_j x}{x^2 + p_j x + q_j}.$$

Методы разложения на элементарные дроби. Сначала функция приводится к каноническому виду (см. (2.26)); в случае неправильной дробно-рациональной функции выделяется целая рациональная часть и значение коэффициента при члене с наибольшим показателем степени в многочлене, находящемся в знаменателе оставшейся правильной дробно-рациональной функции, приводится к 1. Далее, для разложения на элементарные дроби требуется, чтобы было известно множество решений уравнения $Q(x) = 0$, т. е. представление $Q(x)$ в виде произведения (см. (2.24)). Для определения коэффициентов при разложении на элементарные дроби существуют различные методы; поясним некоторые из них на примерах.

Метод неопределенных коэффициентов.

Пример 1.
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x}{2x^2 - 4x + 2} = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x}{(x - 1)^2}.$$

Запишем
$$\frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2}.$$

Умножая обе части на $(x - 1)^2$, получим $x = A_1 x + (A_2 - A_1)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $A_1 = 1$ и $A_2 - A_1 = 0$; следовательно,
$$f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Пример 2.
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x} = \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x(x^2 + x + 1)^2}.$$

Запишем

$$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + x + 1} + \frac{B_2 + C_2 x}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Умножим обе части на $x(x^2 + x + 1)^2$:

$$2x^4 + 2x^2 - 5x + 1 =$$

$$= A_1(x^2 + x + 1)^2 + (B_1 + C_1 x)(x^2 + x + 1)x + (B_2 + C_2 x)x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим

$$A_1 + C_1 = 2, \quad 2A_1 + B_1 + C_1 = 0,$$

$$3A_1 + B_1 + C_1 + C_2 = 2, \quad 2A_1 + B_1 + B_2 = -5, \quad A_1 = 1.$$

Отсюда $A_1 = C_1 = C_2 = 1$, $B_1 = -3$ и $B_2 = -4$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-3 + x}{x^2 + x + 1} + \frac{-4 + x}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Метод подстановки численных значений.

Пример 3.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x + 1)(x - 2)}.$$

Запишем $f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{x - 2}$. Полагая последовательно для x значения 1, -2 и 3, получим систему

$$-\frac{1}{2} = A_1 + \frac{1}{2}A_2 - A_3, \quad -\frac{1}{8} = -\frac{1}{2}A_1 - A_2 - \frac{1}{4}A_3,$$

$$\frac{11}{12} = \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + A_3.$$

Решение этой системы: $A_1 = 1/2$, $A_2 = -1/3$, $A_3 = 5/6$. Таким образом, получаем разложение

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x + 1)} + \frac{5}{6(x - 2)}.$$

Метод предельных значений.

Пример 4.

$$f(x) = \frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72} =$$

$$= \frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x - 2)^3(x + 3)^2}.$$

Запишем

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x - 2} + \frac{A_{12}}{(x - 2)^2} + \frac{A_{13}}{(x - 2)^3} + \frac{A_{21}}{x + 3} + \frac{A_{22}}{(x + 3)^2}. \quad (2.28)$$

Умножив (2.28) на $(x - 2)^3$, получим

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x + 3)^2} =$$

$$= A_{13} + (x - 2)\Big(A_{12} + (x - 2)A_{11} +$$

$$+ (x - 2)^2\Big(\frac{A_{21}}{x + 3} + \frac{A_{22}}{(x + 3)^2}\Big)\Big).$$

Устремив x в обеих частях к 2, получим $A_{13} = -3$. Умножив (2.28) на $(x + 3)^2$ и устремив затем x к -3, получим $A_{22} = -5$. Простое преобразование выражения (2.28) дает в результате

$$f(x) + \frac{3}{(x - 2)^3} + \frac{5}{(x + 3)^2} = \frac{3x - 1}{(x - 2)(x + 3)} =$$

$$= \frac{A_{11}}{x - 2} + \frac{A_{12}}{(x - 2)^2} + \frac{A_{21}}{x + 3}. \quad (2.29)$$

Аналогичным образом (т. е. умножая (2.29) на $(x - 2)^2$ или на $(x + 3)$ и устремляя x к 2 или к -3) получаем $A_{12} = 0$, $A_{21} = 2$. Преобразуя (2.29) в равенство $\frac{3x - 1}{(x - 2)(x + 3)} - \frac{2}{x + 3} = \frac{A_{11}}{x - 2}$, получим, что $A_{11} = 1$. Таким образом, приходим к разложению

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{-3}{(x - 2)^3} + \frac{2}{x + 3} + \frac{-5}{(x + 3)^2}.$$

Примечание 1. Для случая, рассмотренного в примере 1, т. е. для разложения $f(x)$ вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_m}{x - x_m},$$

по вышеописанному методу предельных значений имеем

$$A_j = \lim_{x \to x_j} (x - x_j)\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

С другой стороны,

$$\lim_{x \to x_j} \frac{Q(x)}{x - x_j} = \lim_{x \to x_j} \frac{Q(x) - Q(x_j)}{x - x_j} = Q'(x_j) \neq 0,$$

и, значит, разложение на элементарные дроби окончательно может быть записано так:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(x_j)}{Q'(x_j)} \frac{1}{x - x_j}.$$

Примечание 2. Для случая, рассмотренного в примере 4, неопределенные коэффициенты можно искать по

Таблица к п. 2.5.1.3.

	$n = 2m - 1$; $m \in \mathbb{N}$	$n = 2m$; $m \in \mathbb{N}$	
Степенная функция	$g(x) = x^n$	$g(x) = x^n$	
Иррациональная функция	$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[n]{-x} & \text{для } -\infty < x < 0 \\ \sqrt[n]{x} & \text{для } 0 \leqslant x < +\infty \end{cases}$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$, $0 \leqslant x < +\infty$	$f(x) = -\sqrt[n]{x}$, $0 \leqslant x < +\infty$
Область значений f	$-\infty < y < +\infty$	$0 \leqslant y < +\infty$	$-\infty < y \leqslant 0$
Точки перегиба	M_0 (0, 0)	нет	нет
Поведение функции на интервалах монотонности	монотонно возрастает	монотонно возрастает	монотонно убывает

формулам

$$A_{13} = \lim_{x\to 2}[(x-2)^3 f(x)],\quad A_{12} = \frac{1}{1!}\lim_{x\to 2}[(x-2)^3 f(x)]',$$

$$A_{11} = \frac{1}{2!}\lim_{x\to 2}[(x-2)^3 f(x)]'',\quad A_{22} = \lim_{x\to -3}[(x+3)^2 f(x)],$$

$$A_{21} = \frac{1}{1!}\lim_{x\to -3}[(x+3)^2 f(x)]'.$$

2.5.1.3. Иррациональные алгебраические функции. Простые иррациональные алгебраические функции, называемые также степенными функциями с *дробными показателями степени* вида $1/n$, где n — натуральное число, являются обратными к степенным функциям с натуральными показателями степени. В случае четного показателя степени существуют две обратные функции; для нечетного показателя — одна обратная функция.

Графики иррациональных функций см. в 1.2.1.3; свойства приведены в таблице на стр. 173.

2.5.2. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Неалгебраические функции называются *трансцендентными* (см. 2.5.1). К наиболее важным трансцендентным функциям относятся тригонометрические функции, показательные функции, гиперболические функции, а также функции, обратные к ним.

2.5.2.1. Тригонометрические функции и обратные к ним.

2.5.2.1.1. Определение тригонометрических функций. Пусть круг радиуса r с центром в начале (прямоугольной декартовой) системы координат пересекает положительную ось абсцисс в точке S (рис. 2.7). Движущаяся по окружности точка P с координатами ξ, η определяет угол SOP, величину которого (в радианах или в градусах — см. 2.6.3) обозначим через x. При этом x положительно, если точка P, начиная движение из точки S, пробегает окружность в направлении против часовой стрелки (положительном направлении). *Тригонометрические круговые функции* (функции угла) определяются следующими равенствами:

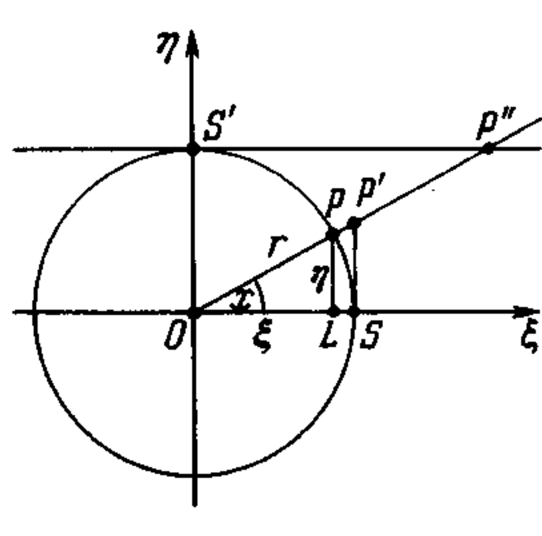


Рис. 2.7

синус: $f(x) = \sin x = \dfrac{\eta}{r}$;

косинус: $f(x) = \cos x = \dfrac{\xi}{r}$;

тангенс: $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\eta}{\xi}$;

котангенс: $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\xi}{\eta}$;

секанс: $f(x) = \sec x = \dfrac{r}{\xi}$;

косеканс: $f(x) = \operatorname{cosec} x = \dfrac{r}{\eta}$.

Область определения тригонометрических функций состоит из множества действительных чисел x, за исключением значений, обращающих в нуль знаменатель.

Примечания. 1) Косинус (лат. «complementi sinus» — дополнительный к синусу) является синусом дополнительного угла, и, наоборот, синус является косинусом дополнительного угла; соответственно также тангенс и котангенс или секанс и косеканс находятся друг с другом в отношении функция — кофункция, т. е. имеют место равенства (x — в радианах)

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \sec x = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

2) Благодаря простым соотношениям $\sec x = 1/\cos x$ и $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ функции секанс и косеканс используются на практике сравнительно редко (в основном в астрономии). В связи с этим подробные сведения о свойствах этих функций здесь приводиться не будут.

3) Если в определении круговых функций специально выбрать $r = 1$, то значения тригонометрических функций могут быть определены (при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$) как длины следующих отрезков (см. рис. 2.7): $\sin x$ соответствует PL; $\cos x$ соответствует OL; $\operatorname{tg} x$ соответствует $P'S$; $\operatorname{ctg} x$ соответствует $S'P''$.

Периодичность тригонометрических функций. Так как положения движущейся по окружности точки, соответствующие двум углам, величины которых отличаются на число, кратное 2π, совпадают, то значения всех тригонометрических функций периодически повторяются, т. е. имеют место равенства $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, а для тангенса и котангенса даже $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$ и $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k\pi)$, при этом $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Соотношения в прямоугольном треугольнике. Для значений аргумента x между 0 и $\pi/2$, рассматриваемого в качестве угла прямоугольного треугольника, имеем следующие соотношения для тригонометрических функций:

$$\sin x = \frac{a}{c},\quad \cos x = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg} x = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{b}{a},\quad \sec x = \frac{c}{b},\quad \operatorname{cosec} x = \frac{c}{a},$$

где (рис. 2.8) a — длина противолежащего катета, b — длина прилежащего катета, c — длина гипотенузы.

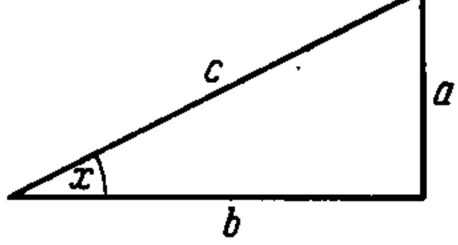


Рис. 2.8

Графики тригонометрических функций см. в 1.2.2.1, таблицы значений функций — в 1.1.1.10.

Вспомогательные методы для нахождения значений, которые не могут быть непосредственно определены из таблиц.

2.5.2.1.2. Свойства тригонометрических функций.

1) Значения тригонометрических функций для аргументов, значения которых лежат между $\pi/2$ и 2π, сводятся к значениям функций от аргу-

	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f(x)=\operatorname{ctg} x$
Область определения	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$-\infty < x < +\infty$ $x \neq k\pi$
Область значений	$-1 \leqslant f(x) \leqslant +1$	$-1 \leqslant f(x) \leqslant +1$	$-\infty < f(x) < +\infty$	$-\infty < f(x) < +\infty$
Нули	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
Полюсы	нет	нет	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$
Длина периода	2π	2π	π	π
Экстремумы в точках	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	нет	нет
Точки перегиба	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
Четность функции	нечетная	четная	нечетная	нечетная

$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

ментов, лежащих между 0 и $\pi/2$, при помощи следующих *формул приведения*:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,$$
$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x,$$
$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = -\cos x,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x, \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = \pm \sin x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x.$$

2) Значение тригонометрической функции f от отрицательного аргумента может быть выражено через значение соответствующей функции от положительного аргумента при помощи соотношений $f(-x)=f(x)$ для косинуса и $f(-x)=-f(x)$ для синуса, тангенса и котангенса.

3) Для определения значений тригонометрических функций при значении аргумента $|x| \geqslant 2\pi$ нужно учитывать периодичность тригонометрических функций (см. 2.5.2.1.1).

4) Значение любой тригонометрической функции для значений аргумента между $\pi/4$ и $\pi/2$ может быть сведено к значению дополнительной функции для дополнительного угла. Это используется в таблицах тригонометрических функций.

5) При выполнении различных действий с тригонометрическими функциями полезно знать значения функций для некоторых углов и знаки значений функций в четырех квадрантах:

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Квадрант	Аргумент	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
I	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	–	–	–
III	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	–	–	+	+
IV	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$	–	+	–	–

2.5.2.1.3. Соотношения между тригонометрическими функциями.

Связь между функциями с одинаковым значением аргумента).*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,$$

$$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1,$$

$$\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1, \quad \cos x \cdot \sec x = 1.$$

Теоремы сложения для суммы и разности аргументов).*

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x},$$

$$\sin(x + y + z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z,$$

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z.$$

Теоремы сложения для кратных аргументов.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\sin 4x = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x,$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x},$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2},$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1},$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x},$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 6 \operatorname{ctg}^2 x + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 x - 4 \operatorname{ctg} x}.$$

Для бóльших значений n выражения для $\sin nx$ и $\cos nx$ получают, пользуясь формулой Муавра для комплексных чисел (см. 3.4 2):

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k} x \sin^k x.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \ldots,$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$$

Для функций *половинного аргумента* имеют место следующие соотношения (знак + или − выбирается в соответствии с тем, в какой четверти (квадранте) находится угол – аргумент $x/2$):

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

Теоремы сложения для суммы и разности функций.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right),$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y},$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x - y)}{\cos x \sin y},$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x + y)}{\sin x \cos y}.$$

Произведения тригонометрических функций.

$$\sin(x + y) \sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x,$$

$$\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x,$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)],$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)],$$

*) Следует заметить, что правые части приводимых формул могут быть неэквивалентны левым частям при некоторых значениях аргумента.

$$\sin x \sin y \sin z = \frac{1}{4}[\sin(x+y-z) + \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) - \sin(x+y+z)],$$

$$\sin x \cos y \cos z = \frac{1}{4}[\sin(x+y-z) - \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) + \sin(x+y+z)],$$

$$\sin x \sin y \cos z = \frac{1}{4}[-\cos(x+y-z) + \cos(y+z-x) + \cos(z+x-y) - \cos(x+y+z)],$$

$$\cos x \cos y \cos z = \frac{1}{4}[\cos(x+y-z) + \cos(y+z-x) + \cos(z+x-y) + \cos(x+y+z)],$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = -\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y},$$

$$\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = -\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y} = -\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y}.$$

Соотношения между квадратами тригонометрических функций с одинаковым значением аргумента.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^2 x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{cosec}^2 x$
$\sin^2 x$		$1-\cos^2 x$	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$	$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}$
$\cos^2 x$	$1-\sin^2 x$		$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$	$\frac{1}{\sec^2 x}$	$\frac{\operatorname{cosec}^2 x - 1}{\operatorname{cosec}^2 x}$
$\operatorname{tg}^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$	$\sec^2 x - 1$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$
$\operatorname{ctg}^2 x$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$		$\frac{1}{\sec^2 x - 1}$	$\operatorname{cosec}^2 x - 1$

Степени тригонометрических функций.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x),$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x),$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).$$

Для вычисления $\sin^n x$ и $\cos^n x$ при бо́льших натуральных показателях степени n можно использовать формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$ (см. выше).

2.5.2.1.4. Синусоидальная функция общего вида $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Многие процессы в природе и технике имеют колебательный характер, что в математической форме записывается в виде функции $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (где A, ω, φ — действительные числа и $A \neq 0$, $\omega \neq 0$). Если сравнить график функции $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin\omega(x + \varphi/\omega)$ с графиком функции $y = \sin x$, то видно, что параметр A вызывает сжатие ($|A| < 1$) или растяжение ($|A| > 1$) графика вдоль оси ординат; если $A < 0$, то график будет к тому же зеркально отражен относительно оси абсцисс; параметр ω изменяет (наименьший) период колебаний, период становится равным $2\pi/|\omega|$; слагаемое φ вызывает смещение графика функции вдоль оси абсцисс на $|\varphi/\omega|$ единиц (см. 1.2.2.1 и рис. 1.22).

Пример. График функции $f(x) = -2\sin(2x + \pi/4)$ по сравнению с графиком функции $g(x) = \sin x$ зеркально отражен и сжат в два раза относительно оси абсцисс, растянут в два раза вдоль оси ординат и сдвинут на $\pi/8$ в отрицательном направлении оси абсцисс. Наименьший период функции f равен π.

Физическая интерпретация функции $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Если выбрать в качестве независимого переменного время t, то получим $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Здесь φ — это смещение по фазе, или «начальная фаза», $T = 2\pi/\omega$ — «период колебаний», $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$ — «частота колебаний», $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — круговая, или циклическая, частота (число колебаний за 2π секунд) и A — «амплитуда колебаний». Если A зависит от времени по закону $A = A(t) = e^{-Rt}$, где $R > 0$, то амплитуда постепенно уменьшается (затухающее колебание; см. 1.2.2.2). Если колебания накладываются друг на друга, то результат определяется как сумма синусоидальных величин; если колебания имеют одинаковую частоту, то их сумма имеет ту же частоту:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega t + \varphi_k) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

При $n = 2$ имеют место следующие соотношения:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Функцию $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ можно также представить в виде $f(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$, причем

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},\ a/A = \cos\varphi,\ b/A = \sin\varphi.$$

2.5.2.1.5. Определение обратных тригонометрических функций. Функции, обратные к тригонометрическим функциям, назы-

ваются *обратными круговыми* или *обратными тригонометрическими* функциями.

Пусть k — целое число.

Функции, обратные к функциям $\left\{\begin{array}{l} y=\sin x \\ y=\cos x \\ y=\operatorname{tg} x \\ y=\operatorname{ctg} x \end{array}\right\}$,

рассматриваемым на каждом из промежутков $\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{2k-1}{2}\pi,\ \frac{2k+1}{2}\pi\right] \\ {[k\pi,\ (k+1)\pi]} \\ \left(\frac{2k-1}{2}\pi,\ \frac{2k+1}{2}\pi\right) \\ (k\pi,\ (k+1)\pi) \end{array}\right\}$,

называются $\left\{\begin{array}{l} \text{арксинусом *)}, \\ \text{арккосинусом}, \\ \text{арктангенсом}, \\ \text{арккотангенсом} \end{array}\right\}$

и обозначаются $\left\{\begin{array}{l} y=\operatorname{Arcsin} x, \\ y=\operatorname{Arccos} x, \\ y=\operatorname{Arctg} x, \\ y=\operatorname{Arcctg} x. \end{array}\right\}$

Наиболее часто применяются обратные тригонометрические функции, которые получаются, если положить в вышеприведенных интервалах $k=0$ (так называемые *главные значения*; они обозначаются соответственно $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$).

Примеры. $\arcsin 0 = 0$, $\arccos(1/2) = \pi/3$, $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi/6$

2.5.2.1.6. Свойства обратных тригонометрических функций.

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\operatorname{arctg} x$	$y=\operatorname{arcctg} x$
Область определения	$-1 \leqslant x \leqslant +1$	$-1 \leqslant x \leqslant +1$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Область значений	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$
Монотонность	монотонно возрастает	монотонно убывает	монотонно возрастает	монотонно убывает
Точки перегиба	(0, 0)	$(0, \pi/2)$	(0, 0)	$(0, \pi/2)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	—	—	$-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$	π, 0

Графики обратных тригонометрических функций см. в 1.2.2.1. Таблицы значений обратных тригонометрических функций см. в 1.1.1.9 и 1.1.1.10.

*) Arcus — дуга; запись $y=\operatorname{Arcsin} x$ означает, что y есть величина такого угла в радианах, синус которого равен x (лат.: arcus cuius sinus x est).

2.5.2.1.7. Соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Суммы и разности обратных тригонометрических функций.

$$\arcsin x + \arcsin y =$$
$$= \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{при } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1;$$
$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{при } x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;$$
$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{при } x<0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1;$$

$$\arcsin x - \arcsin y =$$
$$= \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{при } xy \geqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1;$$
$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{при } x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1;$$
$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{при } x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;$$

$$\arccos x + \arccos y =$$
$$= \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad \text{при } x+y \geqslant 0;$$
$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad \text{при } x+y<0;$$

$\arccos x - \arccos y =$

$= -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ при $x \geqslant y$;

$= \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ при $x < y$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ при $xy < 1$;

$= \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ при $x > 0,\ xy > 1$;

$= -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ при $x < 0,\ xy > 1$;

$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ при $xy > -1$;

$= \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ при $x > 0,\ xy < -1$;

$= -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ при $x < 0,\ xy < -1$.

2.5.2.2. Показательная и логарифмическая функции.

2.5.2.2.1. Определение показательной и логарифмической функций. Функция f называется *показательной*, если для каждого значения x, принадлежащего области определения, имеет место равенство

$$y = f(x) = a^x,$$

где $a > 0$ – действительное число, $a \neq 1$.

Областью определения функции $f(x) = a^x$ является множество действительных чисел; так как $a^x > 0$ для всех x, то множеством значений функции является множество положительных действительных чисел. При $a > 1$ функция является строго возрастающей, при $0 < a < 1$ – строго убывающей.

Так как $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, то каждая показательная функция f удовлетворяет теореме сложения $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$. Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$.

Существование логарифмической функции обеспечивается строгой монотонностью показательной функции на всей ее области определения. Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

2.5.2.2.2. Частные случаи показательных и логарифмических функций. Если умножить значения функции на действительное положительное число k, т. е. перейти к функции $g(x) = ka^x$, то в силу равенства $ka^x = a^{x+\log_a k}$ это означает сдвиг графика функции f на $\log_a k$ единиц в положительном направлении вдоль оси абсцисс.

Если в выражении $f(x) = a^x$ в качестве a взять число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, трансцендентное число $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$, то получим показательную функцию $f(x) = e^x$, играющую важную роль в естественных науках. Значения функции e^x с любой точностью можно вычислить при помощи степенного ряда (см. 3.1.14.6):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Применения функции $f(x) = e^x$. Процессы (органического) роста: $g(t) = g_0e^{ct}$ (g_0 – начальная величина, c – постоянная роста).

Процессы распада: $m(t) = m_0e^{-\lambda t}$ (m_0 – начальная величина, λ – постоянная распада).

Затухающие колебания: $f(t) = e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi)$ (см. 2.5.2.1.4).

Теория ошибок: $f(x) = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса – функция ошибок).

Функция, обратная к $y = e^x$, обозначается $y = \ln x$.

Так как $\log_a(kx) = \log_a k + \log_a x$, то график функции $g(x) = \log_a(kx)$, где $k > 0$, получается из графика функции $f(x) = \log_a x$ сдвигом последнего на $\log_a k$ единиц в положительном направлении оси ординат.

2.5.2.2.3. Свойства показательной и логарифмической функций.

	$y=a^x$, $a>1$	$y=a^x$, $0<a<1$
Область определения	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Область значений	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Монотонность	монотонно возрастающая	монотонно убывающая
Нули	нет	нет
Точки пересечения с осью ординат	$y=1$	$y=1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	0	$+\infty$
	$y=\log_a x$, $a>1$	$y=\log_a x$, $0<a<1$
Область определения	$0 < x < +\infty$	$0 < x < +\infty$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Монотонность	монотонно возрастающая	монотонно убывающая
Нули	$x=1$	$x=1$
Точки пересечения с осью ординат	нет	нет
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	не имеет смысла	не имеет смысла

Графики показательных и логарифмических функций см. в 1.2.2.2. Таблицы значений показательной и логарифмической функций см. в 1.1.1.10–1.1.1.12.

2.5.2.3. Гиперболические функции и обратные к ним.

2.5.2.3.1. Определение гиперболических функций.

Синус гиперболический

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Тангенс гиперболический

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Секанс гиперболический

$$y = \operatorname{sch} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Косинус гиперболический

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Котангенс гиперболический

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Косеканс гиперболический

$$y = \operatorname{csch} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Графики гиперболических функций см. в 1.2.2.3. Таблицы значений гиперболических функций см. в 1.1.1.10.

2.5.2.3.3. Соотношения между гиперболическими функциями. Приведенные ниже равенства аналогичны соотношениям между тригонометрическими функциями.

Замечание. Равенства, в которых гиперболические функции f встречаются в форме $f(x)$ или $f(ax)$, могут быть получены по аналогии с выводом соотношений для соответствующих тригонометрических функций, если формально заменить $\sin x$ на $i \operatorname{sh} x$ и $\cos x$ на $\operatorname{ch} x$, где $i^2 = -1$ (см. также 3.4.1).

Примеры. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ преобразуется в $\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ преобразуется в $i \operatorname{sh} 2x = 2i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, или $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Основные соотношения:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{sch} x = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{\operatorname{cth} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1.$$

2.5.2.3.2. Свойства гиперболических функций.

	$y = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{th} x$	$y = \operatorname{cth} x$
Область определения	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$ $x \neq 0$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$	$1 \leqslant y < +\infty$	$-1 < y < +1$	$-\infty < y < -1$ $+1 < y < +\infty$
Нули	$x = 0$	нет	$x = 0$	нет
Асимптоты	нет	нет	$y = \pm 1$	$x = 0$ $y = \pm 1$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$	$\pm\infty$	$+\infty$	± 1	± 1
Монотонность	монотонно возрастает	на $(-\infty, 0)$ монотонно убывает, на $(0, +\infty)$ монотонно возрастает	монотонно возрастает	на $(-\infty, 0)$ монотонно убывает, на $(0, +\infty)$ монотонно убывает
Экстремумы	нет	минимум $x = 0$	нет	нет
Точки перегиба	$x = 0$	нет	$x = 0$	нет
Четность функции	нечетная	четная	нечетная	нечетная

Соотношения между квадратами гиперболических функций с одинаковым значением аргумента

	$\mathrm{sh}^2 x$	$\mathrm{ch}^2 x$	$\mathrm{th}^2 x$	$\mathrm{cth}^2 x$	$\mathrm{sch}^2 x$	$\mathrm{csch}^2 x$
$\mathrm{sh}^2 x$	–	$\mathrm{ch}^2 x-1$	$\dfrac{\mathrm{th}^2 x}{1-\mathrm{th}^2 x}$	$\dfrac{1}{\mathrm{cth}^2 x-1}$	$\dfrac{1-\mathrm{sch}^2 x}{\mathrm{sch}^2 x}$	$\dfrac{1}{\mathrm{csch}^2 x}$
$\mathrm{ch}^2 x$	$\mathrm{sh}^2 x+1$	–	$\dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2 x}$	$\dfrac{\mathrm{cth}^2 x}{\mathrm{cth}^2 x-1}$	$\dfrac{1}{\mathrm{sch}^2 x}$	$\dfrac{1+\mathrm{csch}^2 x}{\mathrm{csch}^2 x}$
$\mathrm{th}^2 x$	$\dfrac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x+1}$	$\dfrac{\mathrm{ch}^2 x-1}{\mathrm{ch}^2 x}$	–	$\dfrac{1}{\mathrm{cth}^2 x}$	$1-\mathrm{sch}^2 x$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{csch}^2 x}$
$\mathrm{cth}^2 x$	$\dfrac{\mathrm{sh}^2 x+1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\dfrac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x-1}$	$\dfrac{1}{\mathrm{th}^2 x}$	–	$\dfrac{1}{1-\mathrm{sch}^2 x}$	$\mathrm{csch}^2 x+1$

Теоремы сложения для суммы и разности аргументов.

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y,$$

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y,$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}\, x \pm \mathrm{th}\, y}{1 \pm \mathrm{th}\, x\, \mathrm{th}\, y},$$

$$\mathrm{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \mathrm{cth}\, x\, \mathrm{cth}\, y}{\mathrm{cth}\, x \pm \mathrm{cth}\, y}.$$

Теоремы сложения для двойного и половинного аргументов.

$$\mathrm{sh}\, 2x = 2\, \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x,$$

$$\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x,$$

$$\mathrm{th}\, 2x = \frac{2\, \mathrm{th}\, x}{1 + \mathrm{th}^2 x},$$

$$\mathrm{cth}\, 2x = \frac{1 + \mathrm{cth}^2 x}{2\, \mathrm{cth}\, x},$$

$$\mathrm{sh}\frac{x}{2} = \sqrt{(\mathrm{ch}\, x - 1)/2} \quad \text{при } x \geqslant 0,$$

$$\mathrm{sh}\frac{x}{2} = -\sqrt{(\mathrm{ch}\, x - 1)/2} \quad \text{при } x < 0,$$

$$\mathrm{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{(\mathrm{ch}\, x + 1)/2},$$

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\, x - 1}{\mathrm{sh}\, x},$$

$$\mathrm{cth}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x - 1} = \frac{\mathrm{ch}\, x + 1}{\mathrm{sh}\, x}.$$

Сумма и разность гиперболических функций.

$$\mathrm{sh}\, x \pm \mathrm{sh}\, y = 2\, \mathrm{sh}\frac{x \pm y}{2}\mathrm{ch}\frac{x \mp y}{2},$$

$$\mathrm{ch}\, x + \mathrm{ch}\, y = 2\, \mathrm{ch}\frac{x + y}{2}\mathrm{ch}\frac{x - y}{2},$$

$$\mathrm{ch}\, x - \mathrm{ch}\, y = 2\, \mathrm{sh}\frac{x + y}{2}\mathrm{sh}\frac{x - y}{2},$$

$$\mathrm{th}\, x \pm \mathrm{th}\, y = \frac{\mathrm{sh}(x \pm y)}{\mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y}.$$

Формула Муавра.

$$(\mathrm{ch}\, x \pm \mathrm{sh}\, x)^n = \mathrm{ch}\, nx \pm \mathrm{sh}\, nx.$$

2.5.2.3.4. Определение обратных гиперболических функций. Функции, обратные к гиперболическим, называются также *ареа-функциями.* Они определяются следующим образом:

ареасинус

$$y = \mathrm{Arsh}\, x, \text{ если } x = \mathrm{sh}\, y;$$

ареакосинус *)

$$y = \mathrm{Arch}\, x, \text{ если } x = \mathrm{ch}\, y;$$

ареатангенс

$$y = \mathrm{Arth}\, x, \text{ если } x = \mathrm{tg}\, y;$$

ареакотангенс

$$y = \mathrm{Arcth}\, x, \text{ если } x = \mathrm{cth}\, y.$$

Явное выражение обратных гиперболических функций через логарифмические функции. Если приведенные в 2.5.2.3.1 функциональные уравнения разрешить относительно x и затем формально поменять переменные местами, то получим

$$y = \mathrm{Arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$y = \mathrm{Arch}\, x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(\text{для } x \geqslant 1 \text{ и } -\infty < y \leqslant 0),$$

$$y = \mathrm{Arch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(\text{для } x \geqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant y < +\infty),$$

$$y = \mathrm{Arth}\, x = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$(\text{при } |x| < 1),$$

$$y = \mathrm{Arcth}\, x = \ln\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1}$$

$$(\text{при } |x| > 1).$$

---

*) Следует учесть, что $y = \mathrm{ch}\, x$ не во всей области определения – монотонная функция. Следовательно, обратную функцию получают отдельно для каждого из двух промежутков монотонности.

2.5.2.3.5. Свойства обратных гиперболических функций.

	$y=\operatorname{Arsh} x$	$y=\operatorname{Arch} x$	$y=\operatorname{Arth} x$	$y=\operatorname{Arcth} x$
Область определения	$-\infty<x<+\infty$	$1\leqslant x<+\infty$	$-1<x<+1$	$-\infty<x<-1$ $+1<x<+\infty$
Область значений	$-\infty<y<+\infty$	$0\leqslant y<+\infty$ или $-\infty<y\leqslant 0$	$-\infty<y<+\infty$	$-\infty<y<+\infty$ $y\neq 0$
Нули	$x=0$	$x=1$	$x=0$	нет
Асимптоты	нет	нет	$x=\pm 1$	$y=0$ $x=\pm 1$
Поведение на бесконечности	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arsh} x=\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arch} x=+\infty$ для $\operatorname{Arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arch} x=-\infty$ для $\operatorname{Arch} x=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$	–	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arcth} x=0$
Точки перегиба	$x=0$	нет	$x=0$	нет
Четность функции	нечетная	ни четная, ни нечетная	нечетная	нечетная

Графики ареафункций получаются из графиков соответствующих гиперболических функций зеркальным отражением относительно прямой $y=x$ (см. 1.2.2.3).

2.5.2.3.6. Соотношения между обратными гиперболическими функциями.

	$\operatorname{Arsh} x$	$\operatorname{Arch} x$	$\operatorname{Arth} x$	$\operatorname{Arcth} x$
$\operatorname{Arsh} x$	–	$\pm\operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arcth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\operatorname{Arch} x$	$\pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1}$	–	$\pm\operatorname{Arth}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm\operatorname{Arcth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x$	$\operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	–	$\operatorname{Arcth}\frac{1}{x}$
$\operatorname{Arcth} x$	$\operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{Arch}\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arth}\frac{1}{x}$	–

Во втором столбце таблицы принято, что

$$\operatorname{Arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

и для $x>0$ берется знак $+$, а для $x<0$ берется знак $-$.

$$\operatorname{Arsh} x\pm\operatorname{Arsh} y=\operatorname{Arsh}(x\sqrt{1+y^2}\pm y\sqrt{1+x^2}),$$

$$\operatorname{Arch} x\pm\operatorname{Arch} y=\operatorname{Arsh}(xy\pm\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

$$\operatorname{Arth} x\pm\operatorname{Arth} y=\operatorname{Arth}\frac{x\pm y}{1\pm xy},$$

$$\operatorname{Arcth} x\pm\operatorname{Arcth} y=\operatorname{Arcth}\frac{1\pm xy}{x\pm y}.$$

2.6. ГЕОМЕТРИЯ

2.6.1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольник. Сумма двух сторон в треугольнике (рис. 2.9) больше третьей стороны: $b + c > a$. Сумма углов в треугольнике равна 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Треугольник определен, если задан какой-нибудь из следующих наборов его элементов: 1) три

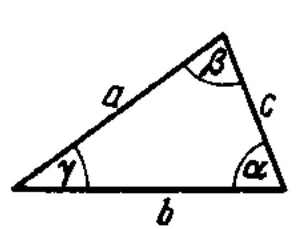


Рис. 2.9

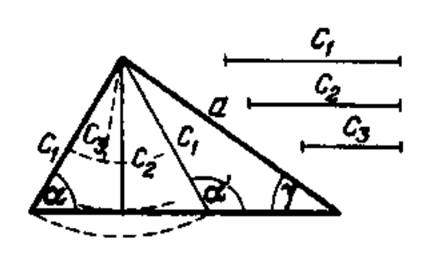


Рис. 2.10

стороны; 2) две стороны и угол между ними; 3) сторона и два прилежащих к ней угла. Если заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон, то при помощи этих элементов можно построить либо два, либо один, либо ни одного треугольника (рис. 2.10); подробнее см. 2.6.3.1.2.

Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны. Медианы треугольника пересекаются в одной точке – центре тяжести треугольника (рис. 2.11) – и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины). Длина медианы, проведенной к стороне a, равна

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

(см. также 2.6.3.1.2).

Биссектрисой треугольника называется лежащий в треугольнике отрезок прямой, которая

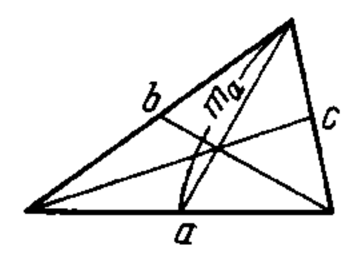


Рис. 2.11

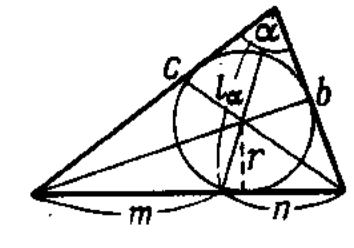


Рис. 2.12

делит его внутренний угол пополам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности (рис. 2.12); о радиусе вписанной окружности r см. 2.6.3.1.2. Длина биссектрисы угла α вычисляется по формуле (см. также 2.6.3.1.2)

$$l_\alpha = \frac{\sqrt{bc\,[(b + c)^2 - a^2]}}{b + c}.$$

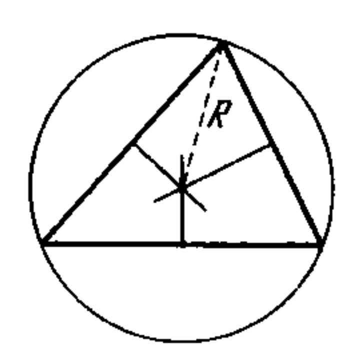


Рис. 2.13

Центр описанной окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах (рис. 2.13); о радиусе описанной окружности R см. 2.6.3.1.2.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой его *ортоцентром*; о длинах высот h_a, h_b, h_c *) см. 2.6.3.1.2.

Высота, медиана и биссектриса, опущенные на одну и ту же сторону, совпадают, если две другие стороны треугольника равны (*равнобедренный треугольник*). Совпадения двух из этих отрезков достаточно для того, чтобы треугольник был равнобедренным.

Для *равностороннего* треугольника ($a = b = c$) центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и ортоцентр совпадают.

Средней линией называется отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника; она параллельна третьей стороне и равна половине ее длины.

Площадь треугольника:

$$S = bh_b/2 = (ab \sin \gamma)/2 = rp = abc/(4R) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = (a + b + c)/2$.

Прямоугольный треугольник (рис. 2.14): c – гипотенуза, a и b – катеты. Имеют место равенства: $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора), $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. Площадь: $S = ab/2 = (a^2 \operatorname{tg} \beta)/2 = (c^2 \sin 2\beta)/4$.

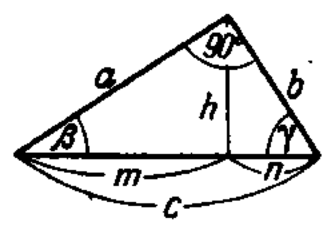


Рис. 2.14

Тригонометрические формулы, относящиеся к треугольнику, см. в 2.6.3.1.1.

Треугольники (а также многоугольники с одинаковым числом сторон) *подобны*, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Для подобия треугольников достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого; 2) два угла одного треугольника равны двум углам другого; 3) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между ними, равны.

Площади подобных фигур пропорциональны квадратам соответствующих линейных элементов (сторон, высот, диагоналей и т. п.).

Параллелограмм (рис. 2.15). Основные свойства: 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные стороны параллельны; 3) диагонали в точке пересечения делятся пополам; 4) противоположные углы равны. Наличие у четырехугольника одного из двух последних свойств или равенства и параллельности одной пары противоположных сторон вызывает как следствия все остальные свойства.

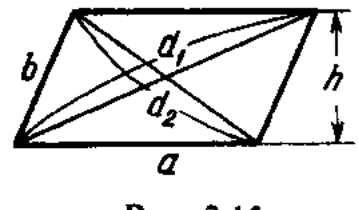


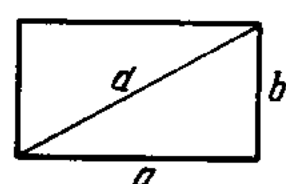
Рис. 2.15

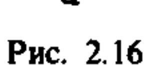
Диагонали и стороны связаны соотношением $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Площадь: $S = ah$.

Прямоугольник и квадрат. Параллелограмм является *прямоугольником* (рис. 2.16), если: 1) все углы прямые или 2) диагонали равны (одно из этих свойств есть следствие другого). Площадь: $S = ab$.

*) h_b означает высоту, опущенную на строку b треугольника.

Прямоугольник есть *квадрат* (рис. 2.17), если $a = b$. Имеют место формулы $d = a\sqrt{2} \approx 1{,}414a$; $a = \sqrt{2}\, d/2 \approx 0{,}707d$. Площадь: $S = a^2 = d^2/2$.




Рис. 2.16

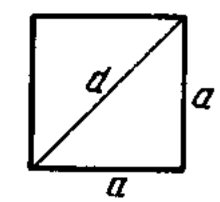


Рис. 2.17

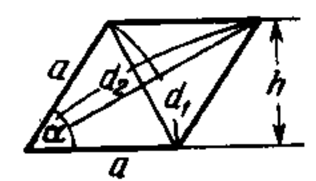


Рис. 2.18

Ромб. Параллелограмм является *ромбом* (рис. 2.18), если у него: 1) все стороны равны, или 2) диагонали взаимно перпендикулярны, или 3) диагонали делят углы параллелограмма пополам (одно из этих свойств влечет как следствия два остальных). Площадь: $S = ah = a^2 \sin\alpha = d_1 d_2/2$.

Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 2.19), a и b – *основания* трапеции, h – *высота*, m – *средняя линия* (отрезок прямой, соединяющий середины непараллельных сторон): $m = (a + b)/2$. Площадь: $S = (a + b)\,h/2 = mh$. Если

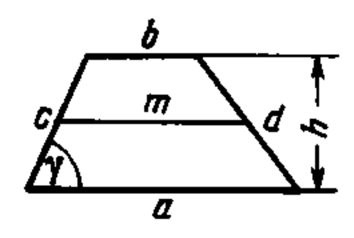


Рис. 2.19

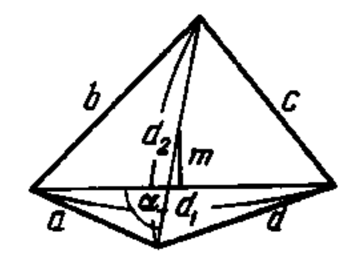


Рис. 2.20

$d = c$, то говорят о *равнобочной* трапеции. В этом случае

$$S = (a - c\cos\gamma)\, c \sin\gamma = (b + c\cos\gamma)\, c \sin\gamma.$$

Четырехугольник (рис. 2.20). Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника равна 360°; $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, где m – отрезок, соединяющий середины диагоналей. Площадь: $S = (d_1 d_2 \sin\alpha)/2$.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$ (*описанный четырехугольник*, рис. 2.21, *а*). Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$ (*вписанный четырехугольник*, рис. 2.21, *б*). Для вписанного

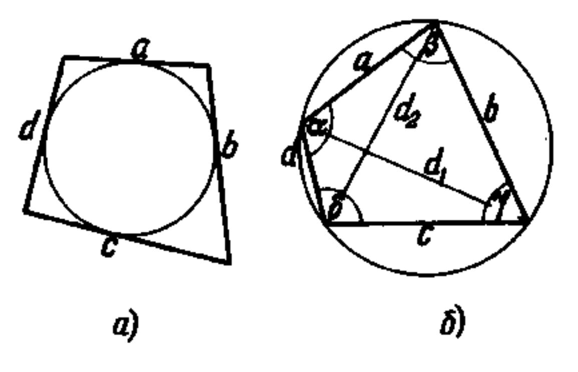


Рис. 2.21

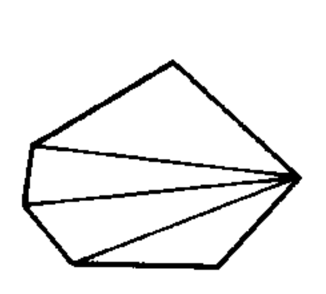
четырехугольника $ac + bd = d_1 d_2$. Площадь вписанного четырехугольника:

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где

$$p = (a + b + c + d)/2.$$

Многоугольник (рис. 2.22). Если число сторон равно n, то сумма внутренних углов равна


Рис. 2.22

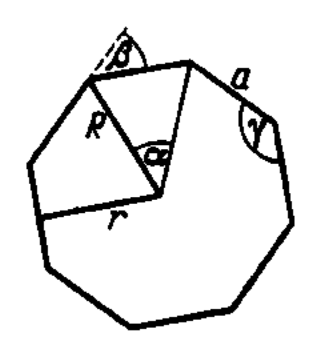


Рис. 2.23

$180°(n - 2)$. Сумма внешних углов равна 360°. Площадь определяют, разбивая многоугольник на треугольники.

Если у многоугольника все стороны и углы равны между собой, то говорят о *правильном многоугольнике* (рис. 2.23). Для правильных многоугольников с n сторонами имеют место следующие соотношения: центральный угол $\alpha = 360°/n$, внешний угол $\beta = 360°/n$, внутренний угол $\gamma = 180° - \beta$. Если R – радиус описанной окруж-

Элементы правильных многоугольников.

Обозначения: n – число сторон, S – площадь, a – сторона, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

ности, а r – радиус вписанной окружности, то сторона $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin(\alpha/2) = 2r\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$. Площадь: $S = nar/2 = nr^2\,\mathrm{tg}(\alpha/2) = nR^2(\sin\alpha)/2 = na^2\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)/4$.

Данные об отдельных правильных многоугольниках см. в таблице их элементов на стр. 184.

Окружность. Радиус r, диаметр d.

Углы, связанные с окружностью *): вписанный угол $\alpha = \breve{BC}/2$ (рис. 2.24), угол между хордой и касательной $\beta = \breve{AC}/2$ (рис. 2.24), угол между хордами $\gamma = (\breve{CB} + \breve{ED})/2$ (рис. 2.25), между секущими

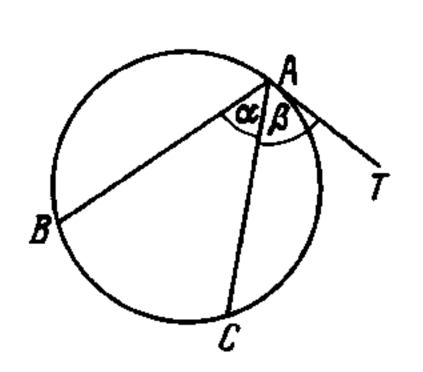


Рис. 2.24

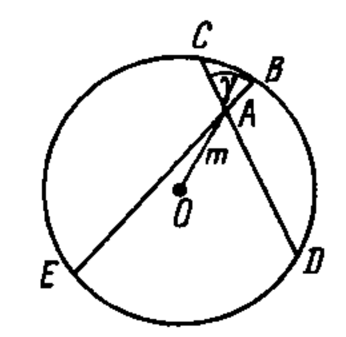


Рис. 2.25

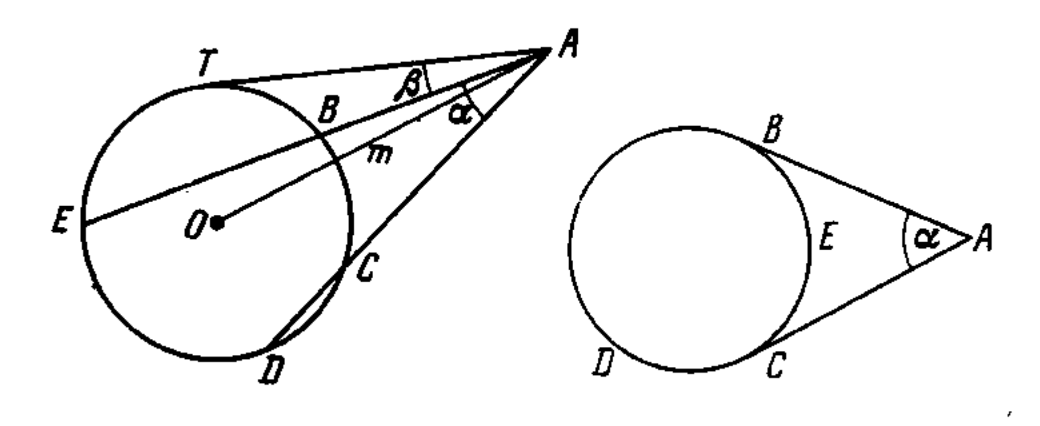


Рис. 2.26

Рис. 2.27

$\alpha = (\breve{DE} - \breve{BC})/2$ (рис. 2.26), между секущей и касательной $\beta = (\breve{TE} - \breve{TB})/2$ (рис. 2.26), между касательными $\alpha = (\breve{BDC} - \breve{BEC})/2$ (рис. 2.27).

Пересекающиеся хорды (рис. 2.25):

$$AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2.$$

Секущие (рис. 2.26):

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2.$$

Длина окружности C и площадь круга S:

$$\pi = C/d \approx 3{,}141592653589793...,$$
$$C = 2\pi r \approx 6{,}283r,$$
$$C = \pi d \approx 3{,}142d,$$
$$C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\sqrt{S},$$
$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142r^2,$$
$$S = \pi d^2/4 \approx 0{,}785d^2,$$
$$S = Cd/4 = 0{,}25Cd,$$
$$r = C/(2\pi) \approx 0{,}159C,$$
$$d = 2\sqrt{S/\pi} \approx 1{,}128\sqrt{S};$$

см. также таблицы 1.1.1.13 и 1.1.1.14.

Сегмент и *сектор* (рис. 2.28). r – радиус, l – длина дуги, a – хорда, α – центральный угол (в градусах), h – стрела сегмента:

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r\sin(\alpha/2),$$
$$h = r - \sqrt{r^2 - (a^2/4)} = r(1 - \cos(\alpha/2)) = (a/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/4),$$
$$l = 2\pi r\alpha/360 \approx 0{,}01745r\alpha.$$

Приближенно:

1) $l \approx (8b - a)/3$;
2) $l \approx \sqrt{a^2 + (16h^2/3)}$.

Площадь сектора: $S = \pi r^2\alpha/360 \approx 0{,}00873r^2\alpha$.

Площадь сегмента:

$$S_1 = r^2[(\pi\alpha/180) - \sin\alpha]/2 = [lr - a(r - h)]/2.$$

Приближенно: $S_1 \approx h(6a + 8b)/15$. Таблицы для S_1, l, h и a см. в 1.1.1.15.

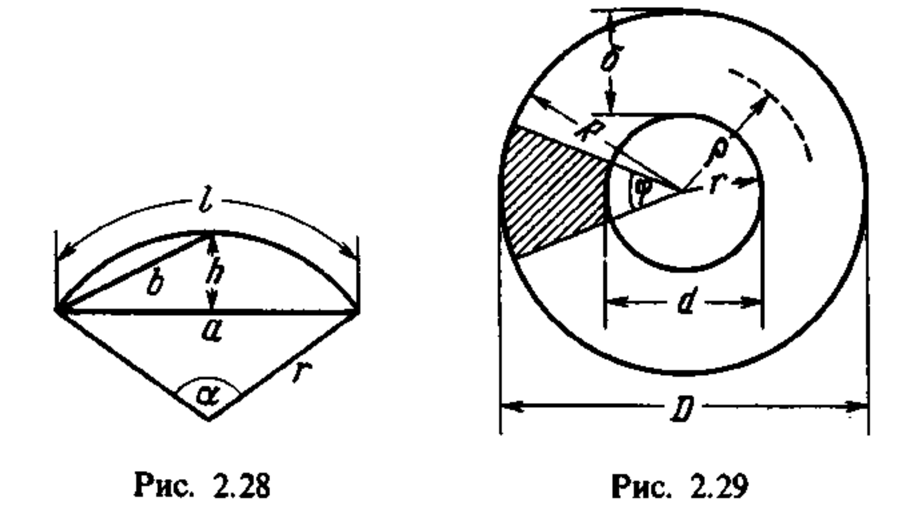


Рис. 2.28

Рис. 2.29

Круговое кольцо (рис. 2.29). $D = 2R$ – внешний диаметр, $d = 2r$ – внутренний диаметр, $\rho = (R + r)/2$ – средний радиус, $\delta = R - r$ – ширина кольца.

Площадь кольца: $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(D^2 - d^2)/4 = 2\pi\rho\delta$.

Площадь части кольца (заштрихована на рис. 2.29) с центральным углом φ (в градусах) равна

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{1440}(D^2 - d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\rho\delta.$$

2.6.2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

2.6.2.1. Прямые и плоскости в пространстве.

Две прямые (несовпадающие), лежащие в одной плоскости, либо имеют одну общую точку, либо не имеют ни одной. В последнем случае они

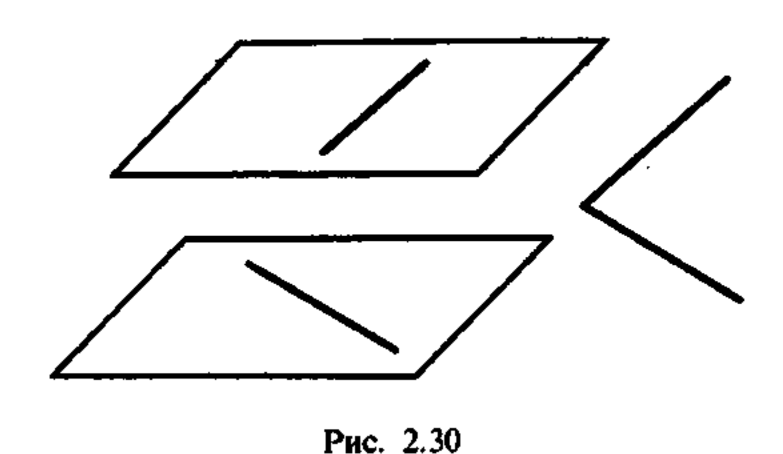


Рис. 2.30

параллельны. Если через две прямые нельзя провести плоскость, они называются *скрещивающимися.*

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку (рис. 2.30). Расстояние между скрещивающимися прямыми

*) В этих равенствах фигурирует не длина дуги, а ее угловая мера, совпадающая с мерой соответствующего центрального угла.

равно длине отрезка прямой, пересекающей обе заданные прямые и перпендикулярной к ним.

Две плоскости (несовпадающие) или пересекаются по одной прямой, или не имеют общих точек. В последнем случае они параллельны. Совпадающие плоскости также считаются параллельными. Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой или если на каждой из них имеются по две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные между собой, то эти плоскости параллельны.

Прямая и плоскость. Прямая может лежать целиком в данной плоскости, иметь с ней одну общую точку или не иметь ни одной. В последнем случае прямая *параллельна* плоскости. Угол между прямой и плоскостью измеряется углом между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 2.31). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым на плоскости, то она перпендикулярна любой прямой на плоскости (*перпендикулярна плоскости*).

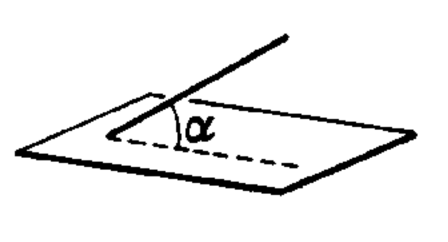


Рис. 2.31

2.6.2.2. Двугранные, многогранные и телесные углы. *Двугранный угол* — фигура, образованная двумя полуплоскостями, выходящими из одной прямой. Двугранный угол измеряется своим линейным углом ABC (рис. 2.32), т. е. углом между перпендикулярами к ребру DE двугранного угла, восставленными в обеих плоскостях (*гранях*) из одной точки.

Многогранный угол $OABCDE$ (рис. 2.33) образуется несколькими плоскостями (*гранями*), имеющими общую точку (*вершину*) и пересекающимися последовательно по прямым OA, OB, ..., OE (*ребрам*). Два ребра, принадлежащие одной грани, образуют *плоский угол* многогранного угла, а две соседние грани — *двугранный угол.* Многогранные углы равны (конгруэнтны), если они при наложении совпадают; для этого должны быть равны соответствующие элементы (плоские и двугранные углы) многогранных углов. Если соответственно равные элементы многогранного угла расположены в обратном порядке, многогранные углы при наложении не совпадают; в этом случае их называют *симметричными*, т. е. они могут быть приведены в положение, изображенное на рис. 2.34.

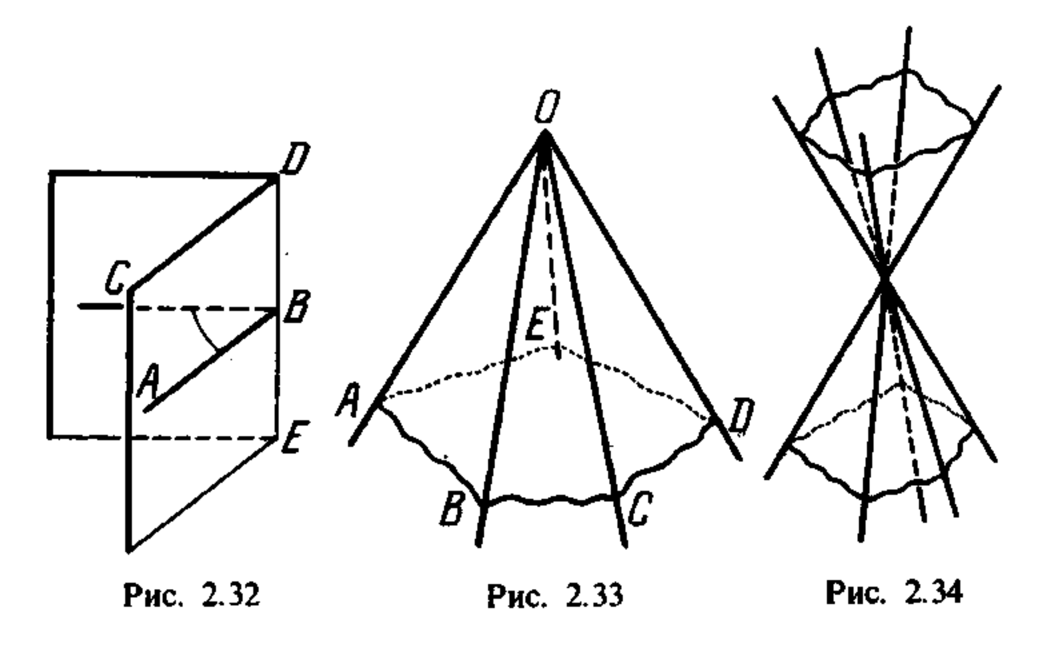
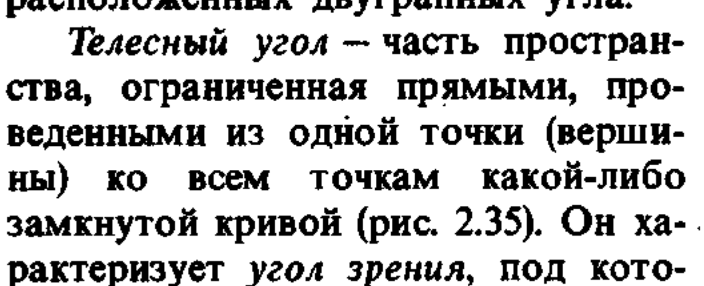


Рис. 2.32 Рис. 2.33 Рис. 2.34

Выпуклый многогранный угол лежит целиком по одну сторону от каждой его грани. *Сумма* плоских углов $\angle AOB + \angle BOC + \ldots + \angle EOA$ (рис. 2.33) любого выпуклого многогранного угла меньше 360° (или 2π).

Трехгранные углы равны, если они имеют: 1) по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами, или 2) по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами, или 3) по три соответственно равных и одинаково расположенных плоских угла, или 4) по три соответственно равных и одинаково расположенных двугранных угла.



Телесный угол — часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины) ко всем точкам какой-либо замкнутой кривой (рис. 2.35). Он характеризует *угол зрения*, под которым из вершины видна данная кривая. Мерой телесного угла является площадь, вырезаемая телесным углом на сфере единичного радиуса с центром в вершине. Например, для конуса с углом при вершине 120° телесный угол равен π (см. формулы в 2.6.2.4).

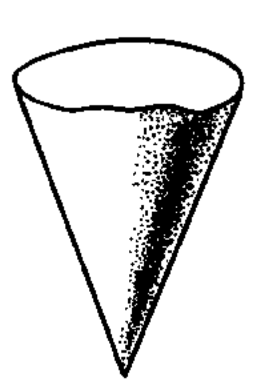


Рис. 2.35

2.6.2.3. Многогранники. Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.

Призма (рис. 2.36). Основания — равные многоугольники; боковые грани — параллелограммы.

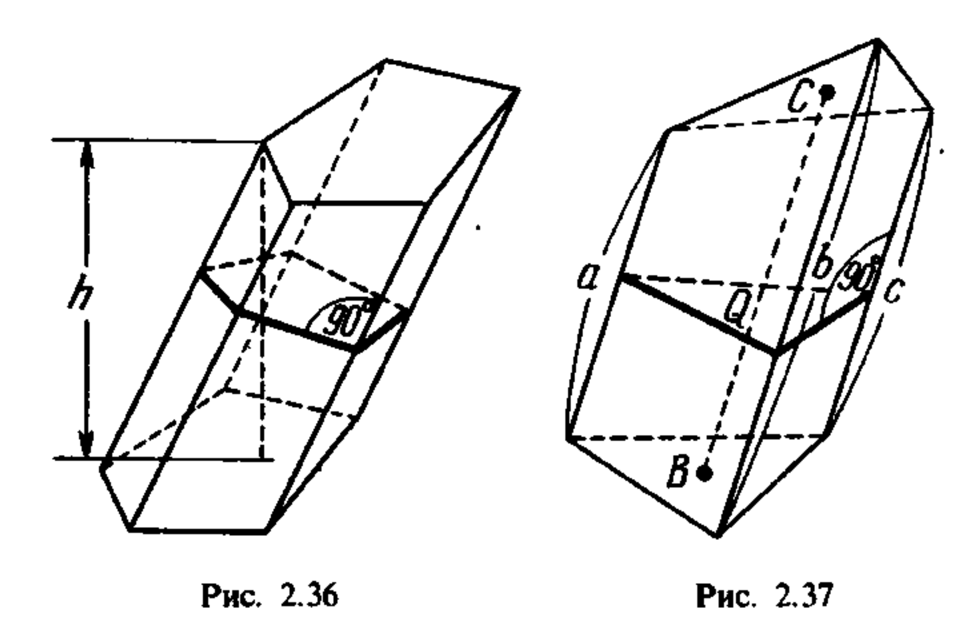


Рис. 2.36 Рис. 2.37

Призма называется *прямой*, если ее ребра перпендикулярны плоскости основания. Призма называется *правильной*, если она прямая и ее основания — правильные многоугольники.

Имеют место соотношения: $M = pl$, где l — ребро, p — периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной ребру; $S = M + 2F$; $V = Fh$.

Для треугольной призмы, усеченной не параллельно основанию, $V = (a + b + c)\,Q/3$ (рис. 2.37), где a, b, c — длины параллельных ребер, Q — площадь перпендикулярного сечения.

Для n-гранной призмы, усеченной не параллельно основанию, $V = lQ$, где l — длина отрезка прямой BC, соединяющего центры тяжести оснований, Q — площадь сечения, перпендикулярного этой прямой.

Параллелепипед (рис. 2.38) — призма, у которой основания — параллелограммы. В параллелепипеде

все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Параллелепипед называется *прямоугольным*, если он прямой (прямая

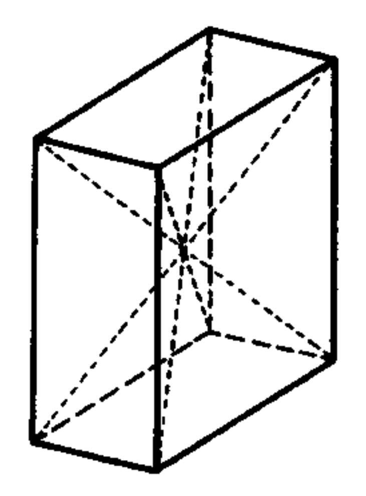


Рис. 2.38

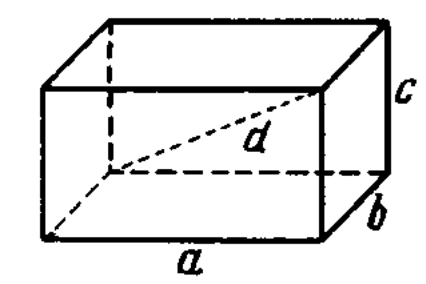
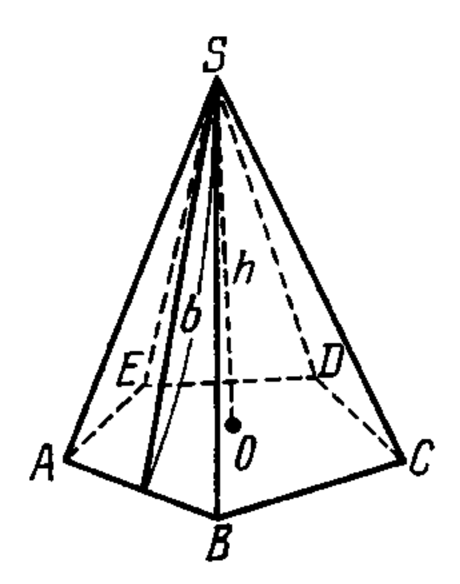


Рис. 2.39

призма) и его основания – прямоугольники. В прямоугольном параллелепипеде (рис. 2.39) все диагонали равны. Если a, b, c – ребра прямоугольного параллелепипеда, а d – его диагональ, то $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ca)$.

Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами: $a = b = c$, $d^2 = 3a^2$, $V = a^3$, $S = 6a^2$.

Пирамида (рис. 2.40). Основанием является какой-либо многоугольник, боковые грани – треугольники, сходящиеся в одной вершине. Пирамида называется *n-угольной*, если в ее основании лежит n-угольник; $V = Fh/3$.



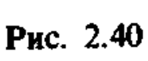


Рис. 2.40

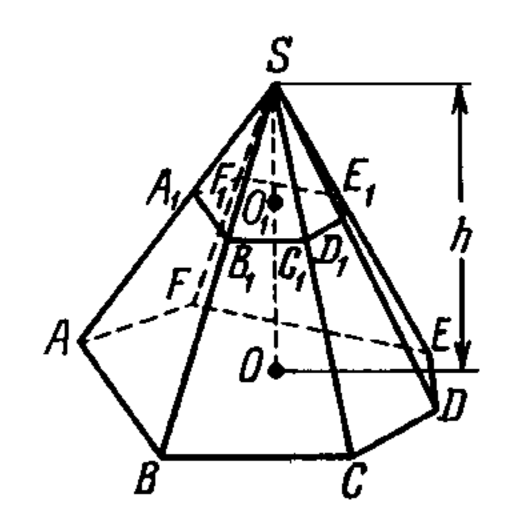


Рис. 2.41

Если пирамида пересечена плоскостью (рис. 2.41), параллельной основанию, то

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \ldots = \frac{SO_1}{O_1O},$$

$$\frac{\text{площадь } ABCDEF}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2,$$

где SO – *высота* пирамиды, т. е. отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на основание.

Пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а высота проходит через его центр. Для правильной пирамиды $M = pb/2$ (где p – периметр основания, а b – высота боковой грани (апофема)).

Треугольная пирамида (рис. 2.42). Если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$ и $AB = r$, то

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Усеченная пирамида (плоскость сечения параллельна основанию, рис. 2.43). Если F – площадь нижнего основания, f – площадь верхнего основания, h – высота (расстояние между основаниями), a и A – две соответственные стороны оснований, то

$$V = h\left[F + f + \sqrt{Ff}\right]/3 = hF\left[1 + (a/A) + (a/A)^2\right]/3.$$

Для правильной усеченной пирамиды $M = (P + p)b/2$, где P и p – периметры соответственно

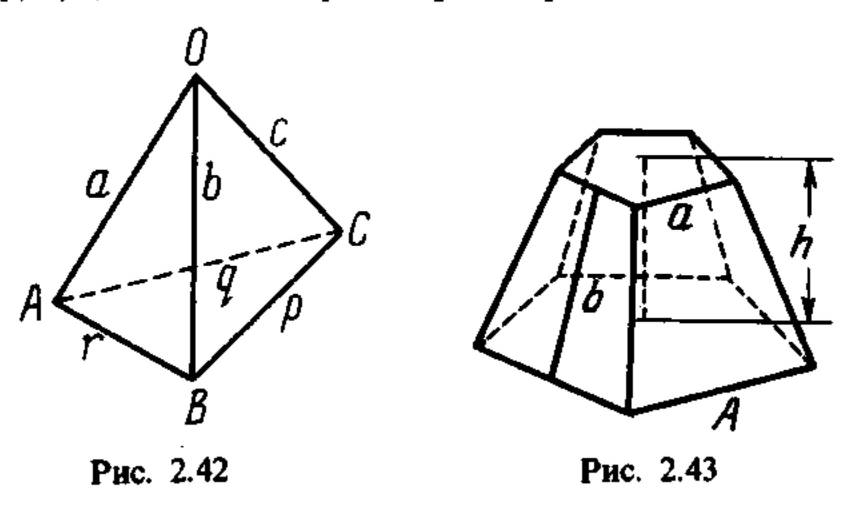


Рис. 2.42 Рис. 2.43

нижнего и верхнего оснований, b – высота боковой грани (апофема).

Обелиск. Нижнее и верхнее основания являются прямоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях; противоположные боковые грани одинаково наклонены к основанию, но не пересекаются в одной точке (рис. 2.44). Если

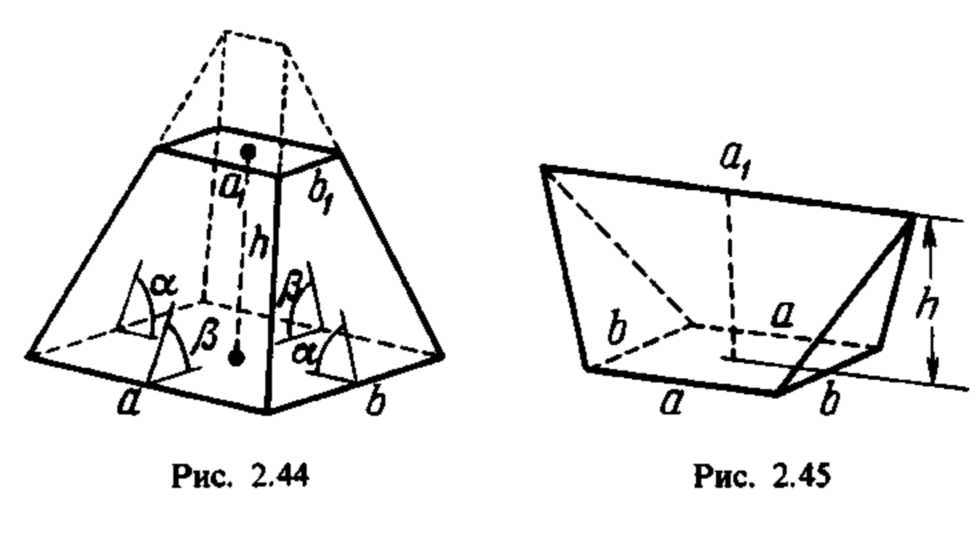


Рис. 2.44 Рис. 2.45

a, b и a_1, b_1 – стороны оснований, h – высота, то

$$V = h\left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1\right]/6 =$$
$$= h\left[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1\right]/6.$$

Клин. Основание – прямоугольник, боковые грани – равнобедренные треугольники и равнобочные трапеции (рис. 2.45);

$$V = (2a + a_1)bh/6.$$

Правильные многогранники. Все грани – равные правильные многоугольники, и все многогранные

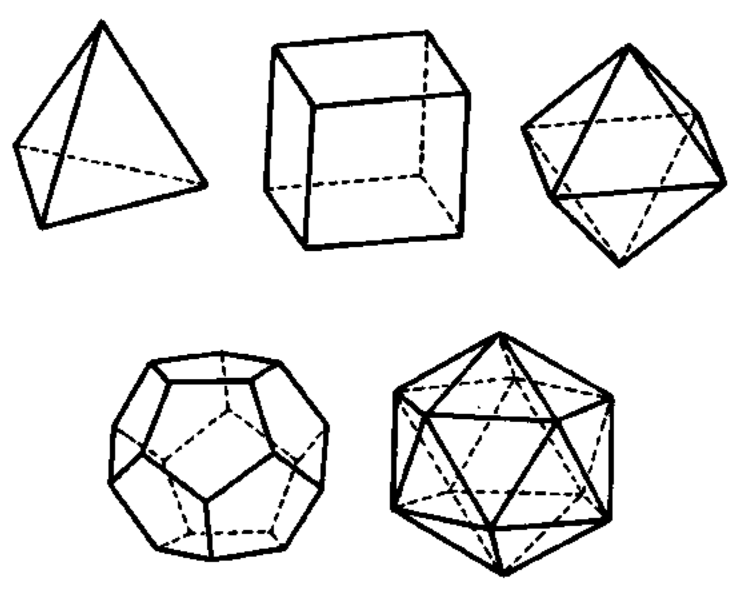


Рис. 2.46

Элементы правильных многогранников (a — длина ребра).

Название	Число граней и их форма	Число		Полная поверхность	Объем
		ребер	вершин		
Тетраэдр	4 треугольника	6	4	$1{,}7321a^2$	$0{,}1179a^3$
Куб	6 квадратов	12	8	$6a^2$	a^3
Октаэдр	8 треугольников	12	6	$3{,}4641a^2$	$0{,}4714a^3$
Додекаэдр	12 пятиугольников	30	20	$20{,}6457a^2$	$7{,}6631a^3$
Икосаэдр	20 треугольников	30	12	$8{,}6603a^2$	$2{,}1817a^3$

углы равны. Существует всего пять правильных многогранников (рис. 2.46), данные о которых представлены в таблице элементов правильных многогранников.

Теорема Эйлера. Если e — число вершин выпуклого многогранника, f — число граней и k — число ребер, то $e - k + f = 2$.

Примеры см. в таблице правильных многогранников.

2.6.2.4. Тела, образованные перемещением линий. Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Цилиндрическая поверхность (рис. 2.47) образуется прямой линией (*образующей*), перемещающейся параллельно заданному направлению вдоль некоторой кривой (*направляющей*).

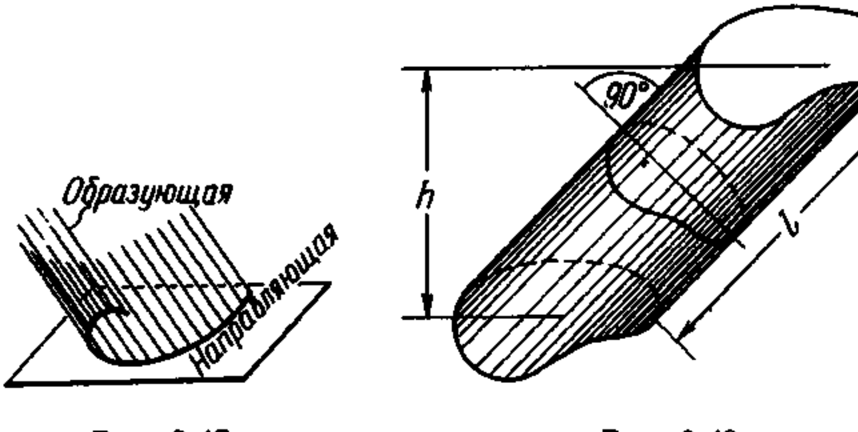


Рис. 2.47 Рис. 2.48

Цилиндр (рис. 2.48) — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, являющимися основаниями цилиндра. Для любого

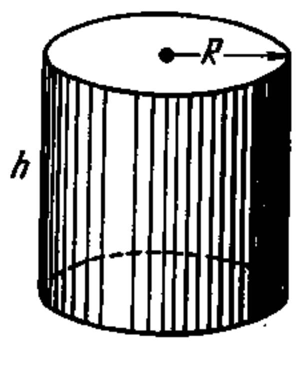


Рис. 2.49 Рис. 2.50

цилиндра (p — периметр основания, p_1 — периметр сечения, перпендикулярного образующей, Q — площадь этого сечения, l — длина образующей) имеем $M = ph = p_1 l$, $V = Fh = Ql$.

Круговой прямой цилиндр имеет в основании круг, и его образующие перпендикулярны плоскости основания (рис. 2.49). Пусть R — радиус основания; тогда $M = 2\pi Rh$, $S = 2\pi R(R + h)$, $V = \pi R^2 h$.

Усеченный круговой цилиндр (рис. 2.50).

$$M = \pi R(h_1 + h_2),$$

$$S = \pi R\left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right],$$

$$V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Отрезок цилиндра — «копыто» (обозначения см. на рис. 2.51; $\alpha = \varphi/2$ — в радианах).

$$V = h\left[a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\alpha\right]/(3b) = hR^3\left[\sin\alpha - (\sin^3\alpha)/3 - \alpha\cos\alpha\right]/b,$$

$$M = 2Rh\left[(b - R)\alpha + a\right]/b$$

(формулы остаются в силе при $b > R$, $\varphi > \pi$).

Цилиндрическая труба (рис. 2.52). R и r — внешний и внутренний радиусы, $\delta = R - r$, $\rho = (R + r)/2$ (средний радиус);

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho.$$

Коническая поверхность (рис. 2.53) образуется прямой линией (*образующей*), перемещающейся

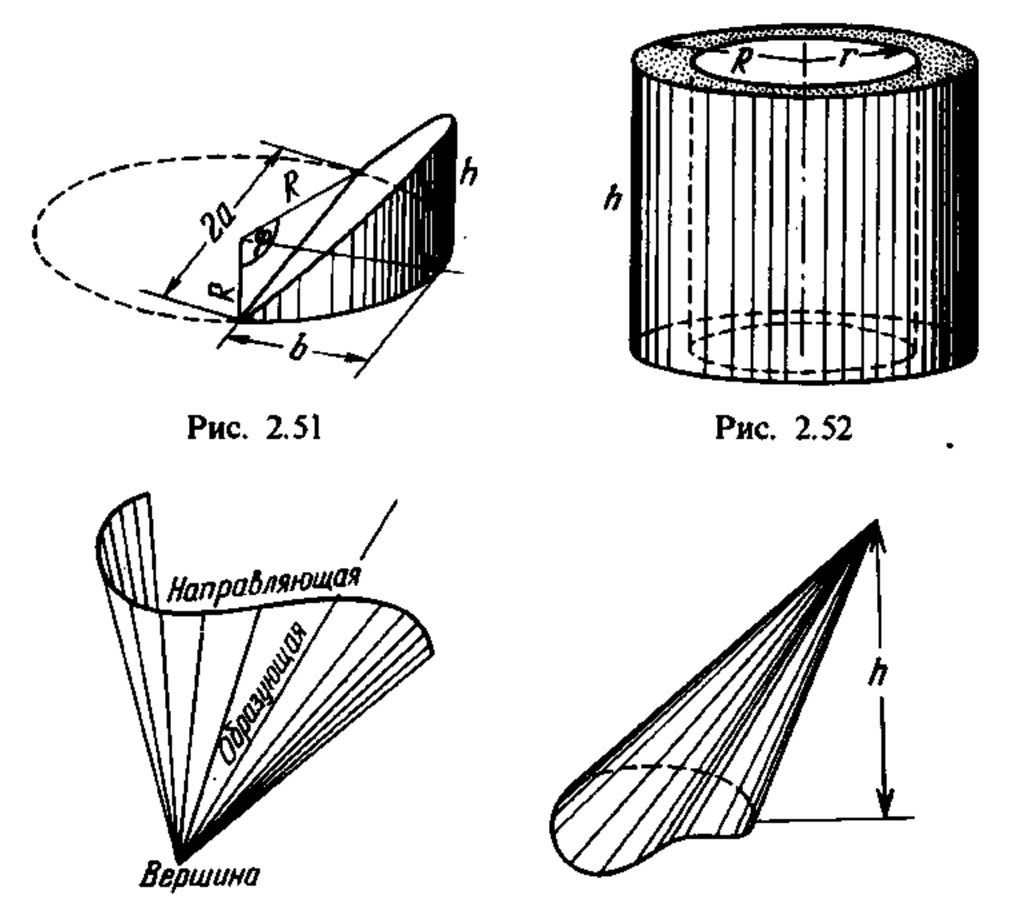


Рис. 2.51 Рис. 2.52

Рис. 2.53 Рис. 2.54

вдоль кривой линии (*направляющей*) и имеющей неподвижную точку (*вершину*).

Конус (рис. 2.54) — тело, ограниченное конической поверхностью с замкнутой направляющей

и плоскостью, образующей основание. Для любого конуса $V = hF/3$.

Круговой прямой конус (рис. 2.55) имеет в основании круг, и его высота проходит через центр

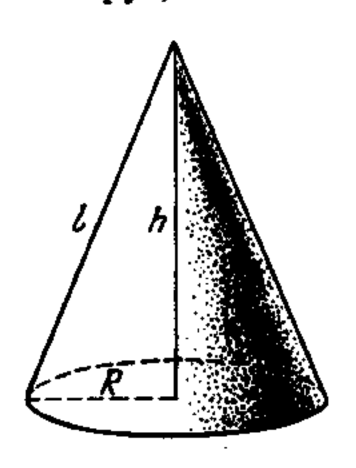


Рис. 2.55

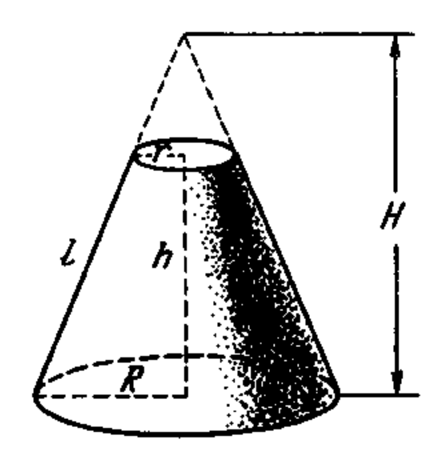


Рис. 2.56

круга (l – длина образующей, R – радиус основания).

$$M = \pi R l = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}, \quad S = \pi R (R + l),$$

$$V = \pi R^2 h/3.$$

Усеченный прямой конус (рис. 2.56).

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}, \quad M = \pi l (R + r),$$

$$V = \pi h (R^2 + r^2 + Rr)/3, \quad H = h + hr/(R - r).$$

Конические сечения см. в 2.6.6.1.

Сфера – поверхность шара (рис. 2.57). (Обозначения: R – радиус сферы, $D = 2R$ – диаметр сферы.) Любое сечение сферы плоскостью есть круг. Под *большим кругом* – кругом радиуса R – понимают сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Через всякие две точки сферы (не являющиеся противоположными концами диаметра) всегда можно провести только один большой круг. Меньшая дуга этого большого круга является кратчайшим расстоянием на сфере между данными точками. О геометрии на сфере см. 2.6.4.1. Поверхность сферы и объем шара:

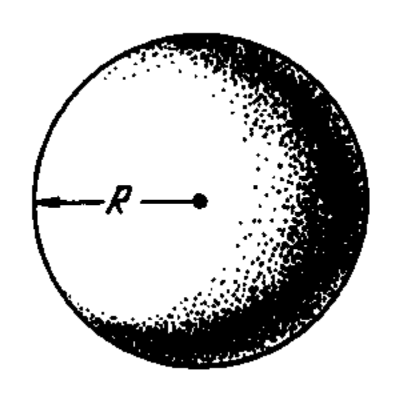


Рис. 2.57

$$S = 4\pi R^2 \approx 12{,}57 R^2, \quad S = \pi D^2 \approx 3{,}142 D^2,$$

$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4{,}836 \sqrt[3]{V^2},$$

$$V = 4\pi R^3/3 \approx 4{,}189 R^3, \quad V = \pi D^3/6 \approx 0{,}5236 D^3,$$

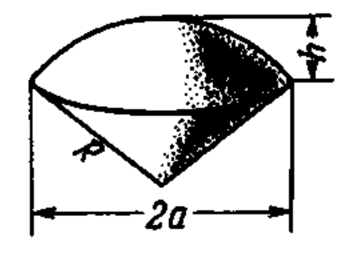
$$V = (\sqrt{S^3/\pi})/6 \approx 0{,}09403 \sqrt{S^3},$$

$$R = (\sqrt{S/\pi})/2 \approx 0{,}2821 \sqrt{S},$$

$$R = \sqrt[3]{3V/(4\pi)} \approx 0{,}6204 \sqrt[3]{V}.$$

Шаровой сектор (рис. 2.58).

$$S = \pi R (2h + a), \quad V = 2\pi R^2 h/3.$$



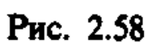


Рис. 2.58

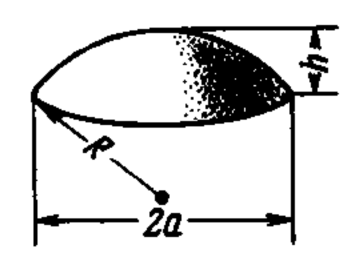


Рис. 2.59

Шаровой сегмент (рис. 2.59).

$$a^2 = h (2R - h), \quad M = 2\pi R h = \pi (a^2 + h^2),$$

$$S = \pi (2Rh + a^2) = \pi (h^2 + 2a^2),$$

$$V = \pi h (3a^2 + h^2)/6 = \pi h^2 (3R - h)/3.$$

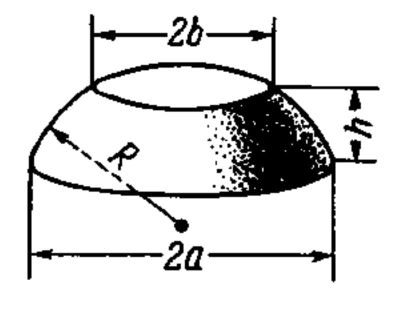


Рис. 2.60

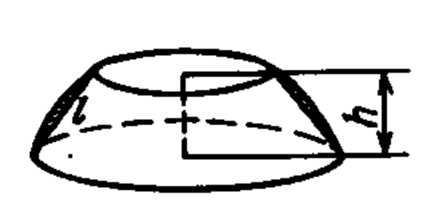


Рис. 2.61

Шаровой слой (рис. 2.60).

$$R^2 = a^2 + [(a^2 - b^2 - h^2)/(2h)]^2, \quad M = 2\pi R h,$$

$$S = \pi (2Rh + a^2 + b^2),$$

$$V = \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)/6.$$

Если V_1 – объем усеченного конуса, вписанного в шаровой слой (рис. 2.61), и l – его образующая, то $V - V_1 = \pi h l^2/6$.

Тор (рис. 2.62) – поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее.

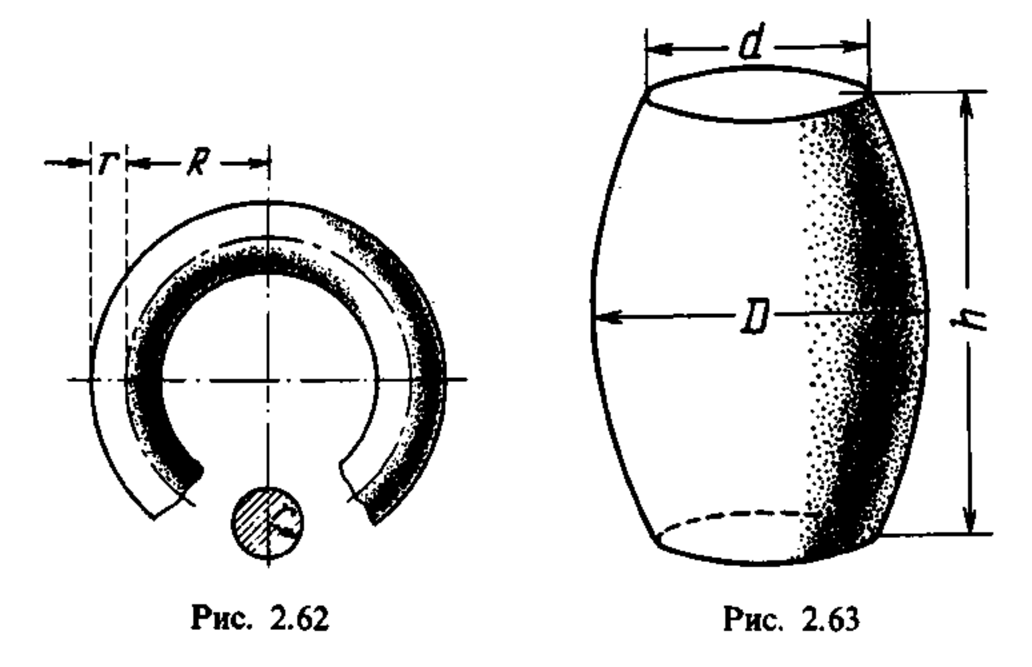


Рис. 2.62 Рис. 2.63

$$S = 4\pi^2 R r \approx 39{,}48 Rr, \quad S = \pi^2 D d \approx 9{,}870 Dd,$$

$$V = 2\pi^2 R r^2 \approx 19{,}74 R r^2, \quad V = \pi^2 D d^2/4 \approx 2{,}467 D d^2.$$

Бочка (рис. 2.63). Для круговой бочки (образующая – дуга окружности) приближенно

$$V \approx 0{,}262 h (2D^2 + d^2), \text{ или } V \approx 0{,}0873 h (2D + d)^2.$$

Для параболической бочки

$$V = \pi h (8D^2 + 4Dd + 3d^2)/60 \approx$$

$$\approx 0{,}05236 h (8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

2.6.3. ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Радианное измерение углов. Наряду с обычным в практике градусным измерением углов, при котором полный угол равен 360°, прямой угол 90°, каждый градус делится на 60 минут (1° = 60′), минута – на 60 секунд (1′ = 60″), используют безразмерное *радианное измерение* углов, прежде всего в теоретических вопросах,

особенно для тригонометрических функций (см. 2.5.2.1). При этом величина центрального угла α в произвольном круге определяется как отношение длины дуги l, на которую этот угол опирается, к радиусу R: $\alpha = l/R$. В круге радиуса 1 (единичном круге) радианная мера угла равна длине дуги, которую вырезают стороны этого угла. За единицу измерения принимается *радиан* – центральный угол для дуги, длина которой равна радиусу.

Радианная мера полного угла равна 2π, прямого угла $\pi/2$. Если $\bar{\alpha}$ – мера угла в градусах, а α – мера того же угла в радианах, то переход от одной меры к другой производится по формулам

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\bar{\alpha}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{180}{\pi}\alpha. \tag{2.30}$$

Таблицы для перевода градусов в радианы см. в 1.1.1.16.

2.6.3.1. Решение треугольников.

2.6.3.1.1. Решение прямоугольного треугольника. Обозначения: a, b – катеты, c – гипотенуза, α, β – углы, противолежащие соответственно сторонам a и b.

Основные соотношения:

$$\alpha + \beta = 90°;$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = a/c, \qquad \cos\alpha = \sin\beta = b/c, \tag{2.31}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = a/b, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = b/a. \tag{2.32}$$

2.6.3.1.2. Решение косоугольного треугольника. Обозначения: a, b, c – стороны, α, β, γ – противолежащие им углы, $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр, R – радиус описанной окружности.

Основные соотношения:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \tag{2.33}$$

Теорема косинусов.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{2.34}$$

Дополнительные соотношения:

Теорема тангенсов.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}((\alpha-\beta)/2)}{\operatorname{tg}((\alpha+\beta)/2)} = \frac{\operatorname{tg}((\alpha-\beta)/2)}{\operatorname{ctg}(\gamma/2)}. \tag{2.35}$$

Теорема половинного угла.

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}; \tag{2.36}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \tag{2.37}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \tag{2.38}$$

Формулы Мольвейде.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\sin(\gamma/2)} = \frac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\cos((\alpha+\beta)/2)}, \tag{2.39}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin((\alpha-\beta)/2)}{\cos(\gamma/2)} = \frac{\sin((\alpha-\beta)/2)}{\sin((\alpha+\beta)/2)}. \tag{2.40}$$

Формула косинусов (теорема о проекциях).

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \tag{2.41}$$

Формула тангенсов.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha} = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta}. \tag{2.42}$$

Остальные соотношения получаются из формул (2.34)–(2.42) соответствующей циклической перестановкой сторон a, b, c и соответственно углов α, β, γ.

Основные случаи решения треугольников.

I. *Даны сторона и два прилежащих угла,* например c, α, β. Тогда третий угол также известен: $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Стороны определяются по формуле (2.33):

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

II. *Даны две стороны и угол между ними,* например a, b, γ.

1) Решение при помощи формулы (2.34):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}, \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma.$$

2) Решение при помощи формулы (2.35):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2};$$

зная $\frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\frac{\alpha+\beta}{2}$, можно вычислить α и β, $c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

III. *Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них,* например a, b, α (α – против a).

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha;$$

решение существует только тогда, когда $b\sin\alpha \leqslant a$.

Различные случаи.

1) $a > b$; *угол противолежит большей стороне;* тогда $\alpha > \beta$, $\beta < 90°$ и треугольник определяется однозначно.

2) $a = b$; тогда $\alpha = \beta$ и равнобедренный треугольник определяется однозначно.

3) $a < b$; *угол противолежит меньшей стороне:*

3а) $b\sin\alpha < a$; имеются два решения β_1 и β_2, $\beta_1 + \beta_2 = 180°$;

3б) $b\sin\alpha = a$; одно решение $\beta = 90°$;

3в) $b\sin\alpha > a$; нет решений.

Далее, $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, $c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

IV. *Даны три стороны:* a, b, c.

Из (2.36): $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ и т. д.

Из (2.34): $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и т. д.

Вычисление других величин в треугольнике (см. также (2.6.1)).

Радиус описанной окружности R (см. также теорему синусов (2.33)).

$$R = \frac{p}{4\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)}. \quad (2.43)$$

Радиус вписанной окружности r.

$$r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p}; \quad (2.44)$$

$$r = p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}; \quad (2.45)$$

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}; \quad (2.46)$$

$$r = (p-c)\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}. \quad (2.47)$$

Высота h_c на сторону c.

$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha. \quad (2.48)$$

Медиана m_c на сторону c.

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}. \quad (2.49)$$

Биссектриса l_γ угла γ.

$$l_\gamma = \frac{2ac\cos(\beta/2)}{a+c} = \frac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c}. \quad (2.50)$$

Площадь S.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \quad (2.51)$$

$$S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma; \quad (2.52)$$

$$S = c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma} = c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}. \quad (2.53)$$

Формула Герона.

$$S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (2.54)$$

2.6.3.2. Применение в элементарной геодезии. Определение недоступного расстояния. В точках A, B могут быть измерены углы α, β, γ и δ между направлениями к точкам P и Q и заданной прямой AB (рис. 2.64). Пусть известно

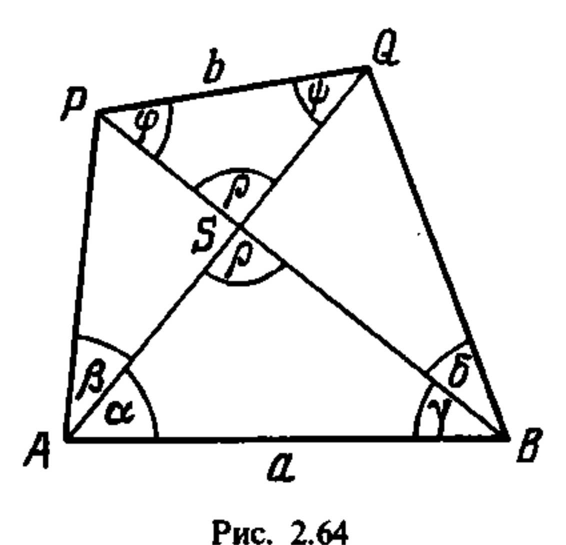


Рис. 2.64

расстояние $a = AB$ (или $b = PQ$) и требуется найти PQ (или AB).

Для решения необходимо определить углы φ и ψ. Так как ρ является углом при вершине как в треугольнике ABS, так и в треугольнике PQS, имеем

$$\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \varepsilon_1. \quad (2.55)$$

Применяя дважды теорему синусов (2.33), получим половину разности искомых углов. Выпишем формулы:

$$AP/a = \sin\gamma/\sin(180^\circ-\alpha-\beta-\gamma) = \sin\gamma/\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$BQ/a = \sin\alpha/\sin(\alpha+\gamma+\delta),$$

$$b/AP = \sin\beta/\sin\psi, \quad b/BQ = \sin\delta/\sin\varphi.$$

Из этих соотношений прежде всего получаем

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\psi\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\sin\delta\sin\alpha}{\sin\varphi\sin(\alpha+\gamma+\delta)}, \quad (2.56)$$

откуда

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\delta\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma+\delta)} = \mathrm{ctg}\,\eta, \quad (2.57)$$

где η – вспомогательный угол. Применяя операции сложения и вычитания, имеем

$$\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi} = \frac{\mathrm{ctg}\,\eta-1}{\mathrm{ctg}\,\eta+1},$$

$$\frac{2\cos((\varphi+\psi)/2)\sin((\varphi-\psi)/2)}{2\sin((\varphi+\psi)/2)\cos((\varphi-\psi)/2)} = \frac{\mathrm{ctg}\,45^\circ\,\mathrm{ctg}\,\eta-1}{\mathrm{ctg}\,\eta+\mathrm{ctg}\,45^\circ}, \quad (2.58)$$

$$\mathrm{tg}((\varphi-\psi)/2) = \mathrm{tg}((\varphi+\psi)/2)\,\mathrm{ctg}(45^\circ+\eta) = \mathrm{tg}((\alpha+\gamma)/2)\,\mathrm{ctg}(45^\circ+\eta).$$

Отсюда можно определить $\varepsilon_2 = (\varphi-\psi)/2$, и тогда

$$\varphi = \varepsilon_1+\varepsilon_2, \quad \psi = \varepsilon_1-\varepsilon_2. \quad (2.59)$$

Подставляя в (2.56), получим искомое расстояние.

Обратная задача. Пусть положение трех точек A, B, C определено относительно друг друга при помощи отрезков $\overline{AC} = a$ и $\overline{BC} = b$, а также углом $\angle ACB = \gamma$. Пусть в точке P измерены углы: $\angle CPA = \alpha$ и $\angle CPB = \beta$. В общем случае

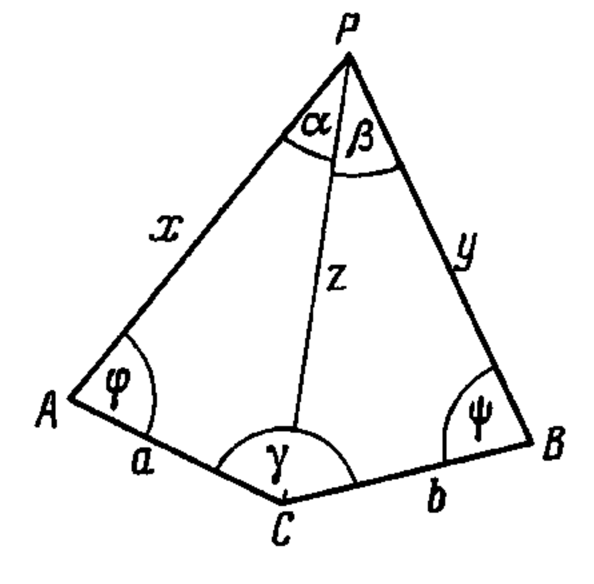


Рис. 2.65

можно найти положение точки P относительно точек A, B, C, т. е. однозначно определить отрезки x, y, z (рис. 2.65). Для этого только необходимо, чтобы точка P не лежала на окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Имеем

$$\varphi+\psi = 360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma) = 2\varepsilon_1,$$
$$\sin\varphi = \frac{z}{a}\sin\alpha, \quad \sin\psi = \frac{z}{b}\sin\beta, \quad (2.60)$$

откуда

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{ctg} \eta, \qquad (2.61)$$

где η – вспомогательный угол. Опять получаем выражение (2.58) и определяем φ и ψ из выражений (2.59). Подставляя эти значения в (2.60), найдем z, а при помощи теоремы синусов (2.33) получим затем x и y.

2.6.4. СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

2.6.4.1. Геометрия на сфере.

Большой круг. Если пересечь шар плоскостью, проходящей через его центр, то в сечении шара получим *большой круг*, радиус которого равен радиусу шара. Если точки A и B не являются противоположными концами диаметра, то через них можно провести только один большой круг; длина меньшей его дуги является *наикратчайшим* расстоянием на сфере между этими точками (*геодезическая линия*). Большие круги играют на сфере роль, аналогичную роли прямых на плоскости.

Двумя различными точками A и B, лежащими на сфере, определяется пучок плоскостей. Каждая плоскость пучка пересекает шар по некоторому кругу. Если A и B не являются противоположными концами диаметра, то плоскость пучка, проходящая через центр шара, определяет наибольший круг пучка – большой круг. Остальные круги называются *малыми кругами*; плоскость, перпендикулярная плоскости, содержащей большой круг, пересекает шар по наименьшему кругу.

Измерение дуг и углов на сфере. Измерение расстояний на сфере проводится вдоль дуг большого круга. Длина дуги большого круга между точками A и B равна

$$\overset{\frown}{AB} = R\alpha, \qquad (2.62)$$

где R – радиус шара, α – соответствующий центральный угол (измеряемый в радианах). Если ограничиться случаем единичной сферы (радиус $R = 1$), то любую дугу большого круга можно охарактеризовать соответствующим центральным углом в радианах. Угол пересечения дуг двух больших кругов измеряется линейным углом между касательными к большим кругам в точке пересечения, или, что одно и то же, двугранным углом, образованным плоскостями больших кругов.

Сферический двуугольник. При пересечении двух больших кругов на поверхности шара образуются четыре *сферических двуугольника*. Площадь сферического двуугольника с углом α:

$$s = 2R^2\alpha. \qquad (2.63)$$

2.6.4.2. Сферический треугольник. Три пересекающихся больших круга образуют на сфере сферический треугольник. Три точки A, B и C, из которых никакие две не являются противоположными концами диаметра, определяют три больших круга, которые пересекаются в точках A, B, C и диаметрально противоположных к ним точках A', B', C' и делят поверхность шара на восемь сферических треугольников (рис. 2.66). При этом стороны (дуги больших кругов) и соответственно углы некоторых из этих треугольников меньше π ($R = 1$); такие сферические треугольники называются *треугольниками Эйлера*. Здесь рассматриваются только треугольники Эйлера.

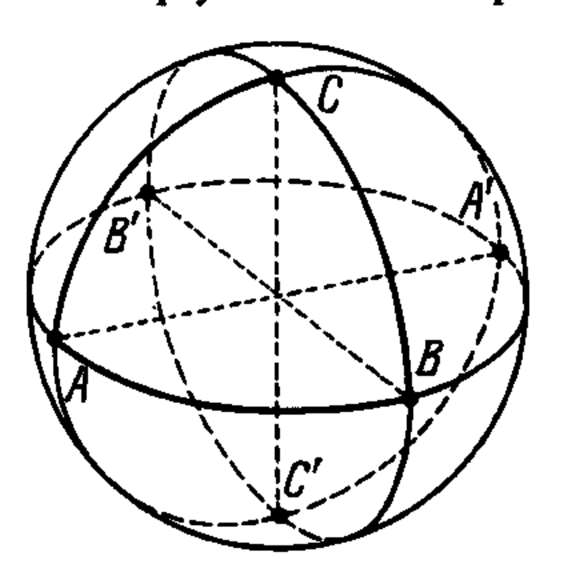


Рис. 2.66

Примечание. Треугольник ABC, не являющийся треугольником Эйлера, с углом $\gamma = \angle AB > \pi$, отличается от полусферы, которая определяется большим кругом, проведенным через точки A и B, только на треугольник Эйлера BAC с углом $\angle BA = 2\pi - \gamma$.

Для треугольника Эйлера (со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ) имеют место следующие утверждения.

1) *Неравенство треугольника.* Сумма двух сторон больше третьей, разность двух сторон меньше третьей:

$$a + b > c, \qquad |a - b| < c. \qquad (2.64)$$

2) Сумма двух углов меньше, чем третий угол, увеличенный на π:

$$\alpha + \beta < \gamma + \pi. \qquad (2.65)$$

3) Наибольшая сторона противолежит наибольшему углу:

$$a < b, \quad \text{если} \quad \alpha < \beta;$$
$$a = b, \quad \text{если} \quad \alpha = \beta.$$

4) Сумма углов заключена между π и 3π, сумма сторон – между 0 и $2\pi R$ (R – радиус сферы):

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi, \qquad 0 < a + b + c < 2\pi R. \qquad (2.66)$$

Таким образом, сумма углов сферического треугольника всегда больше 180°. Разность

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon \qquad (2.67)$$

называется *сферическим избытком* или *сферическим эксцессом*. Через эту величину определяется площадь сферического треугольника:

$$S = R^2\varepsilon. \qquad (2.68)$$

2.6.4.3. Решение сферических треугольников. В этом пункте мы ограничимся случаем единичной сферы (радиус $R = 1$).

2.6.4.3.1. Основные соотношения.

Теорема синусов.

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \qquad (2.69)$$

Теорема косинусов сторон.

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \qquad (2.70)$$

Теорема косинусов углов.

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c. \quad (2.71)$$

Теорема половинного угла.

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}, \quad (2.72)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},$$

где $2p = a + b + c$.

Теорема половинной стороны.

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\sin P\sin(P-\gamma)}{\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)}},$$

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\sin P\sin(P-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}}, \quad (2.73)$$

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}},$$

где $2P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Аналогии Непера.

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2.74)$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2.75)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{a+b}{2}, \quad (2.76)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{a+b}{2}. \quad (2.77)$$

Формулы Деламбра (Гаусса).

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (2.78)$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2.79)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (2.80)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \cos\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \quad (2.81)$$

(Из соотношений (2.70)–(2.81) соответствующей циклической перестановкой сторон a, b, c и углов α, β, γ получаются остальные соотношения.)

Основные случаи решения треугольников.

Ia) *Даны три стороны.*

Из (2.72)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

Из (2.70)

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Iб) *Даны три угла.* В противоположность плоскому треугольнику сферический треугольник в принципе однозначно определяется тремя углами. При этом должны быть выполнены неравенства (2.65) и (2.66). Решение аналогично случаю Ia) по формуле (2.73) или (2.71).

IIa) *Даны две стороны и угол между ними,* например a, b, γ.

1) Решение по формуле (2.70):

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a\cos c}{\sin a\sin c}$$

однозначно определяет c, α, β.

2) Решение по формулам (2.76) и (2.77): однозначно находим $(\alpha+\beta)/2$ и $(\alpha-\beta)/2$, а тем самым α и β. Формула (2.69) дает

$$\sin c = \sin\gamma\,\frac{\sin a}{\sin\alpha};$$

c должно быть выбрано бо́льшим (меньшим), чем b, если γ больше (меньше), чем β.

IIб) *Даны сторона и два прилежащих угла,* например c, α, β.

1) Решение при помощи формулы (2.71).

2) Решение при помощи формул (2.74) и (2.75) (аналогично IIa)).

IIIa) *Даны две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон,* например a, b, α.

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha;$$

решение существует только тогда, когда $\sin b\sin\alpha \leqslant \sin a$.

Различные случаи.

1) $\sin a > \sin b$; следовательно, $\sin\alpha > \sin\beta$; таким образом, $\alpha > \beta$, если $a > b$, и наоборот; β определено однозначно.

2) $\sin a = \sin b$; следовательно, $\sin\alpha = \sin\beta$; как и в случае 1), β определено однозначно.

3) $\sin a < \sin b$; следовательно, $\sin\alpha < \sin\beta$.

3a) $\sin b\sin\alpha < \sin a$; имеются два решения β_1 и β_2; $\beta_1 + \beta_2 = \pi$;

3б) $\sin b\sin\alpha = \sin a$; одно решение $\beta = \pi/2$;

3в) $\sin b\sin\alpha > \sin a$; решений нет.

Далее, разрешив формулы (2.74) или (2.75) ((2.76) или (2.77)) относительно $\operatorname{tg}(c/2)$ $(\operatorname{ctg}(\gamma/2))$, получим c и γ.

IIIб) *Даны два угла и сторона, противолежащая одному из них,* например a, α, β.

Решение аналогично IIIa): $\sin b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$; затем используются аналогии Непера (2.74) – (2.77).

Вычисление других величин, связанных со сферическим треугольником.

Радиус описанного круга $\bar{R}$.

$$\operatorname{ctg}\bar{R} = \sqrt{-\frac{\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)\sin(P-\gamma)}{\sin P}}; \quad (2.82)$$

$$\operatorname{ctg}\bar{R} = \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\sin(\alpha - P), \quad (2.83)$$

где $2P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Радиус вписанного круга r:

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}; \quad (2.84)$$

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin(p-a), \quad (2.85)$$

где $2p = a + b + c$.

Сферический избыток ε (формула Уильера).

$$\operatorname{tg}\frac{P}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}, \quad (2.86)$$

где $2P = \varepsilon$.

Связь между сферической тригонометрией и прямолинейной тригонометрией.

Справедлива *теорема Лежандра*: площадь сферического треугольника с малыми сторонами (поэтому и с малым сферическим избытком) почти равна площади плоского треугольника с теми же сторонами; каждый угол плоского треугольника примерно на одну треть сферического избытка меньше, чем соответствующий угол сферического треугольника.

Теорема синусов, теорема косинусов и теорема о половинном угле в сферической тригонометрии для малых сторон (или, что то же самое, для большого радиуса шара R) переходят в соответствующие теоремы прямолинейной (плоской) тригонометрии.

2.6.4.3.2. Решение прямоугольных треугольников. Обозначения: a, b – катеты, c – гипотенуза, α и β – углы, противолежащие соответственно сторонам a и b.

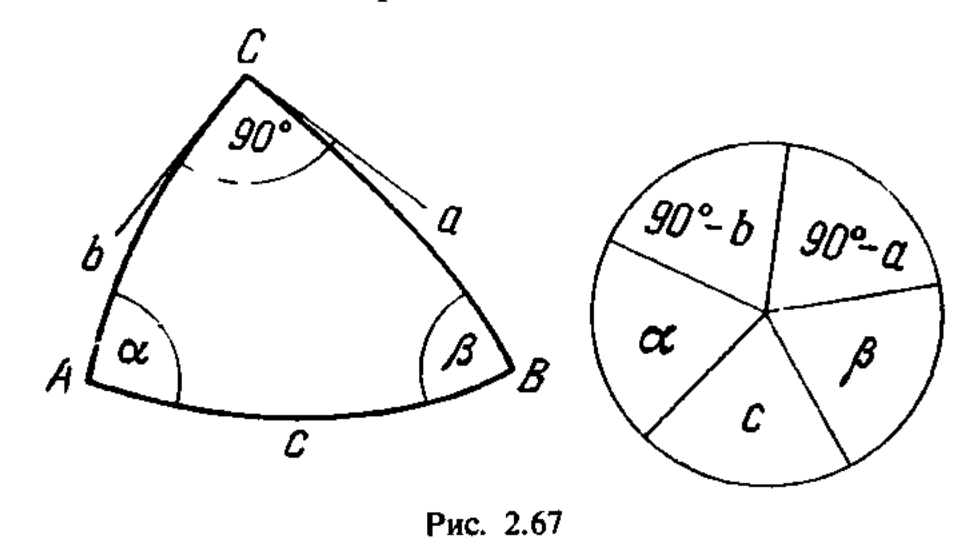


Рис. 2.67

Основные соотношения:

$$\sin a = \cos(90° - a) = \sin\alpha\sin c, \quad (2.87)$$

$$\sin b = \cos(90° - b) = \sin\beta\sin c, \quad (2.88)$$

$$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b) = \cos a\cos b, \quad (2.89)$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - a)\sin\beta = \cos a\sin\beta, \quad (2.90)$$

$$\cos\beta = \sin(90° - b)\sin\alpha = \cos b\sin\alpha, \quad (2.91)$$

$$\sin a = \cos(90° - a) = \operatorname{ctg}(90° - b)\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg} b\operatorname{ctg}\beta, \quad (2.92)$$

$$\sin b = \cos(90° - b) = \operatorname{ctg}(90° - a)\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg} a\operatorname{ctg}\alpha, \quad (2.93)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta, \quad (2.94)$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}(90° - b)\operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} b\operatorname{ctg} c, \quad (2.95)$$

$$\cos\beta = \operatorname{ctg}(90° - a)\operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} a\operatorname{ctg} c. \quad (2.96)$$

Эти основные соотношения могут быть получены из *правила Непера*: если расположить пять элементов прямоугольного треугольника (пропустить прямой угол) по кругу в том порядке, как они находятся в треугольнике, и заменить при этом катеты a и b их дополнениями до 90° (рис. 2.67), то косинус каждого элемента будет равен произведению синусов двух не прилегающих к нему элементов, а также произведению тангенсов двух прилегающих к нему элементов.

Формулы (2.87) и (2.88) можно получить из (2.69); (2.89) – из (2.70); (2.90) и (2.91) – из (2.71).

2.6.5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Системой координат Σ *n-мерного аффинного пространства* A_n (см. 2.6.6) называется множество, состоящее из некоторой точки O аффинного пространства (начала координат) и n линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$, которые принадлежат векторному пространству V_n аффинного (см. 2.6.6) пространства A_n ($x_1, \ldots, x_n$ образуют в V_n базис): $\Sigma = \{O; x_1, \ldots, x_n\}$. Каждая точка P аффинного пространства A_n единственным образом может быть представлена линейной комбинацией n векторов, выходящих из точки O:

$$P = O + (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n).$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, записанные в виде упорядоченной последовательности, называются координатами точки P относительно системы координат Σ. В комплексной записи: $P = P_\Sigma = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_\Sigma$. Если базис $x_1, \ldots, x_n$ ортонормирован, то Σ называется *прямоугольной декартовой системой координат*. Если $\Sigma_1 = \{O; x_1, \ldots, x_n\}$ и $\Sigma_2 = \{Q; y_1, \ldots, y_n\}$ – две системы координат аффинного пространства A_n, а P – точка этого пространства с координатами относительно Σ_1 и Σ_2 соответственно:

$$P_{\Sigma_1} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_{\Sigma_1}, \qquad P_{\Sigma_2} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)_{\Sigma_2},$$

то имеют место следующие формулы перехода:

$$P_{\Sigma_1} = P_{\Sigma_2}A + Q_{\Sigma_1}, \qquad P_{\Sigma_2} = P_{\Sigma_1}B + O_{\Sigma_2}.$$

Строками матрицы A являются координаты векторов $y_1, \ldots, y_n$ в базисе $x_1, \ldots, x_n$. Строками матрицы B являются координаты векторов $x_1, \ldots, x_n$ в базисе $y_1, \ldots, y_n$ (см. 2.4.4.1.4 и 2.4.4.1.5).

В *однородных системах координат* (называемых также *пропорциональными системами координат*), к которым относится, например, барицентрическая система координат, отдельная координата не имеет непосредственного значения для определения положения точки. Положение точки определяется отношением координат друг к другу.

Барицентрическая система координат Σ в n-мерном аффинном пространстве A_n определяется заданием $n + 1$ точек $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$, не лежащих в одной гиперплоскости, принадлежащей A_n. Барицентрическими координатами точки P являются такие (положительные или отрицательные) веса m_i, которые, будучи приписаны точкам P_i ($i = 1, \ldots, n + 1$), образуют систему, центр тяжести которой есть точка P: $P_\Sigma = (m_1, \ldots, m_{n+1})_\Sigma$. Если умножить барицентрические координаты точки (веса) на одно и то же число, то положение определяемой ими точки не изменится.

Пусть даны барицентрическая система координат Σ, состоящая из точек $P_1, \ldots, P_{n+1}$, и система координат Σ_1 аффинного пространства A_n: $\Sigma_1 = \{O; x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть координаты точек $P_1, \ldots, P_{n+1}$ в системе Σ_1 суть $P_{i\Sigma_1} = (x_{i1}, \ldots, x_{in})_{\Sigma_1}$ ($i = 1, \ldots, n+1$). Преобразование координат точки $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\Sigma_1} = (m_1, \ldots, m_{n+1})_{\Sigma}$ осуществляется по формулам

$$x_k = \frac{\sum m_i x_{ik}}{M}, \quad M = \sum m_i \quad (k = 1, \ldots, n). \quad (2.97)$$

Суммирование производится по i от 1 до $n+1$. Если m_i неизвестны, а x_k известны, то (2.97) представляет собой однородную систему из n уравнений с $n+1$ неизвестными $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$. Одно из ненулевых m_i может быть выбрано произвольным образом.

Системой координат Σ на плоскости или в пространстве называют в общем случае систему, состоящую из точек, прямых, лучей, векторов, кривых или других элементов плоскости или пространства, по отношению к которой можно охарактеризовать положение тела на плоскости или в пространстве. А именно, положение каждой точки P плоскости или пространства относительно такой системы однозначно определяется некоторым набором чисел. Эти числа, записанные в виде упорядоченной n-последовательности, называются координатами точки P относительно системы координат Σ: $P = P_\Sigma = (x, y, \ldots, z)_\Sigma$.

2.6.5.1. Системы координат на плоскости.

2.6.5.1.1. Прямолинейные системы координат на плоскости. Прямолинейная система координат на плоскости состоит из фиксированной на плоскости точки O (*начало координат*) и двух пересекающихся в этой точке прямых g_1 и g_2 (*координатных осей*): $\Sigma = \{O; g_1, g_2\}$. На каждой из этих прямых лучам, выходящим из точки O, приписывается положительное и отрицательное направление; кроме того, на каждой прямой выбирается масштаб для измерения длин (рис. 2.68). Без ограничения общности масштабы измерения длины обеих прямых можно считать одинаковыми (в противном случае масштаб одной оси умножением на некоторое постоянное число можно привести к масштабу другой оси).

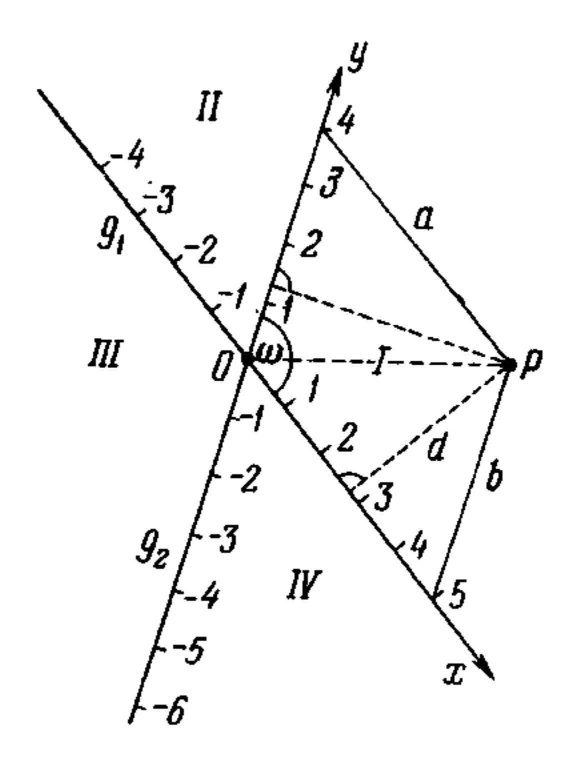


Рис. 2.68

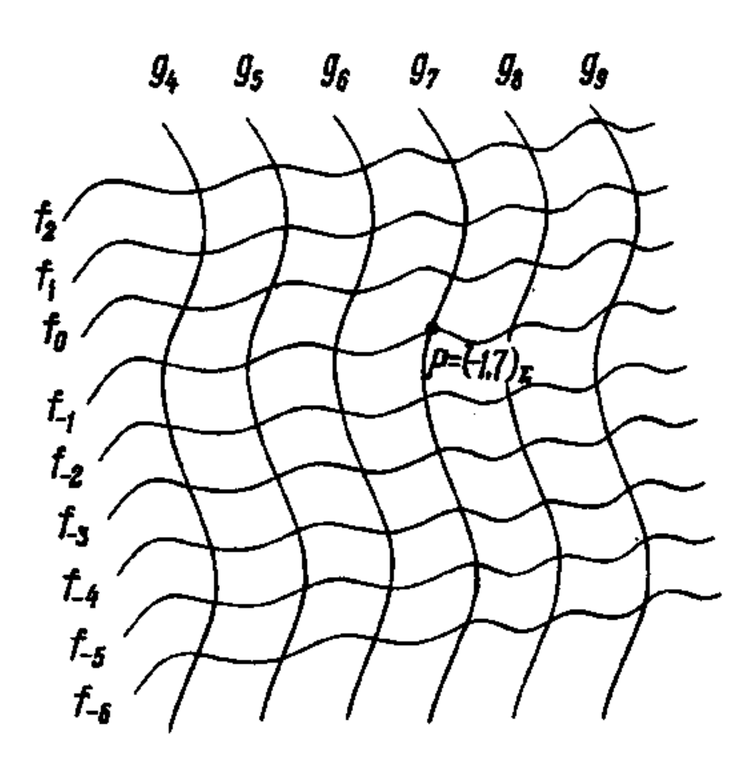


Рис. 2.69

Контравариантными координатами (или параллельными координатами) точки P являются длины проекций отрезка OP, которые получаются при проектировании прямыми, параллельными осям координат, на координатные оси (см. рис. 2.68), взятые со знаком плюс или минус в зависимости от того, лежит ли проекция точки P на положительной (положительный знак координаты) или на отрицательной (отрицательный знак координаты) части координатной оси. Эти координаты совпадают с координатами в двумерном аффинном пространстве, если базисные векторы системы координат имеют единичную длину.

Ковариантными координатами точки P являются длины ортогональных проекций отрезка OP на координатные оси. Ковариантные координаты в аналитической геометрии не употребляются. Ниже мы будем рассматривать только контравариантные координаты.

Угол ω между положительными частями обеих осей называется *координатным углом*. При $\omega = 90°$ система координат называется *прямоугольной* (или *декартовой*) системой координат *); в противном случае система координат называется *косоугольной*. В декартовой системе координат ковариантные и контравариантные координаты совпадают. Обычно в прямолинейной системе координат на плоскости первую ось называют осью x или *осью абсцисс*, а вторую — осью y или *осью ординат*. Оси делят плоскость на четыре части — *квадранты* (см. рис. 2.68). Положение точки P с *абсциссой* a и *ординатой* b относительно системы координат Σ сокращенно записывается в виде $P = P_\Sigma = (a, b)_\Sigma$. Если другие координатные системы одновременно с рассматриваемой не употребляются, то индекс Σ может быть опущен.

2.6.5.1.2. Криволинейные системы координат на плоскости. Криволинейные системы координат на плоскости являются обобщением прямолинейных. Криволинейная система координат на плоскости представляет собой два

*) Эта система координат совпадает с декартовой системой координат, определенной в начале 2.6.5, для случая $n = 2$. В литературе часто применяется также для общих косоугольных координат понятие «декартовы координаты». Тогда при $\omega = 90°$ ($w_1 = w_2 = w_3 = 0$) появляется понятие «прямоугольные декартовы координаты». В последующем под декартовыми координатами всегда следует понимать координаты прямоугольной системы координат, оси которых имеют одинаковые единицы масштаба.

однопараметрических семейства кривых (семейства координатных линий). Через каждую точку P плоскости при этом проходит только одна кривая каждого семейства. Две кривые, принадлежащие разным семействам, имеют ровно одну общую точку. Оба значения параметров, при которых кривые из двух семейств кривых проходят через одну и ту же точку P, называются *криволинейными координатами* точки P. На рис. 2.69 изображена такая координатная система с семействами кривых f_s и g_t (s, t – параметры).

Часто применяющейся криволинейной системой координат является *полярная система координат*. Она состоит из заданной фиксированной точки O плоскости (*полюса*), концентрических окружностей с центром в точке O и лучей с началом в точке O, один из которых называется *полярной осью* (рис. 2.70). Параметрами обоих семейств кривых (*полярными координатами*) являются радиус ρ для

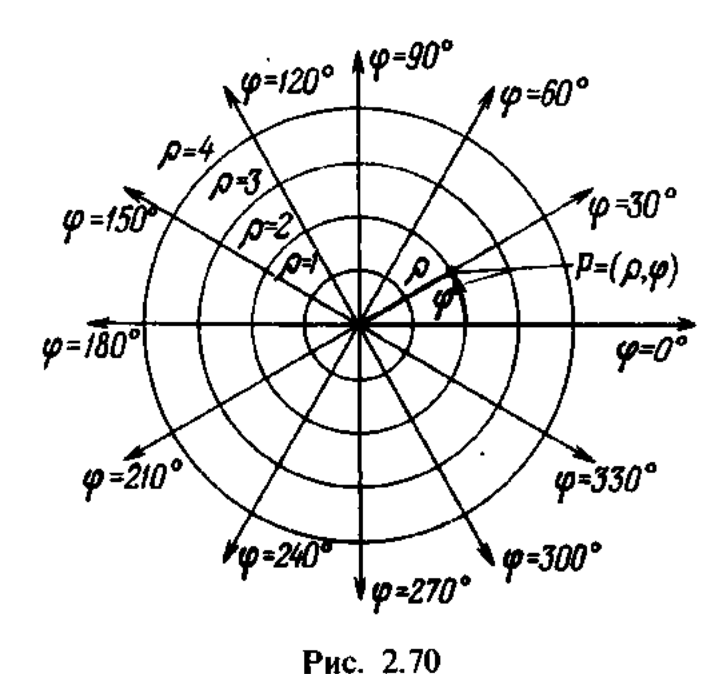


Рис. 2.70

семейства концентрических окружностей (*полярный радиус*, или *расстояние до полюса*) и угол φ между полярной осью и лучом для семейства лучей (*полярный угол*). Полярный угол считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки и отрицательным при отсчете в обратном направлении. Точка P в полярных координатах изображается так: $P = (\rho, \varphi)$.

2.6.5.1.3. Преобразование координат на плоскости. Параллельный перенос системы координат. Если прямолинейная система координат $\Sigma = \{O; g_1, g_2\}$ преобразована переносом на вектор $\overrightarrow{OQ}$ в систему координат $\Sigma' = \{Q; g'_1, g'_2\}$ с началом в точке $Q = (a, b)_\Sigma$ и координатными осями g'_1 и g'_2, параллельными осям g_1 и g_2, то имеют место

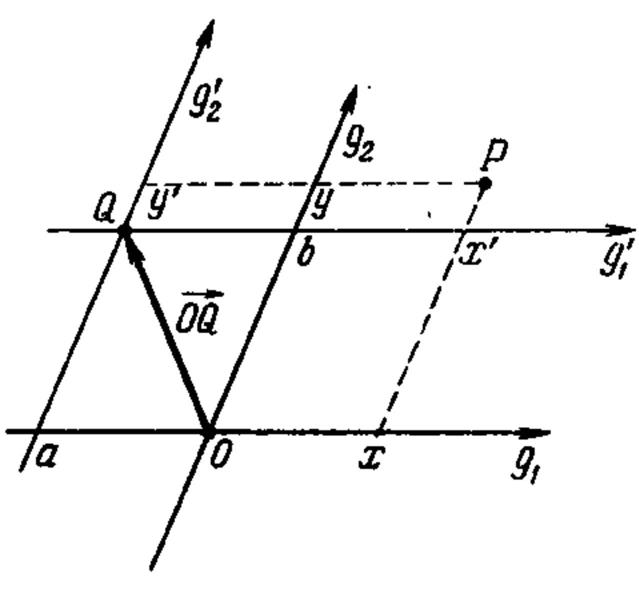


Рис. 2.71

следующие формулы преобразования: $x' = x - a$, $y' = y - b$. При этом $P = (x, y)_\Sigma = (x', y')_{\Sigma'}$ (рис. 2.71).

Поворот системы координат. Координатная система Σ с координатным углом ω при повороте на угол φ переходит в координатную систему Σ'; формулы преобразования имеют вид

$$x' = \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin\omega} x + \frac{\sin\varphi}{\sin\omega} y,$$

$$y' = -\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} x + \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} y.$$

При этом $P = (x, y)_\Sigma = (x', y')_{\Sigma'}$ (рис. 2.72).

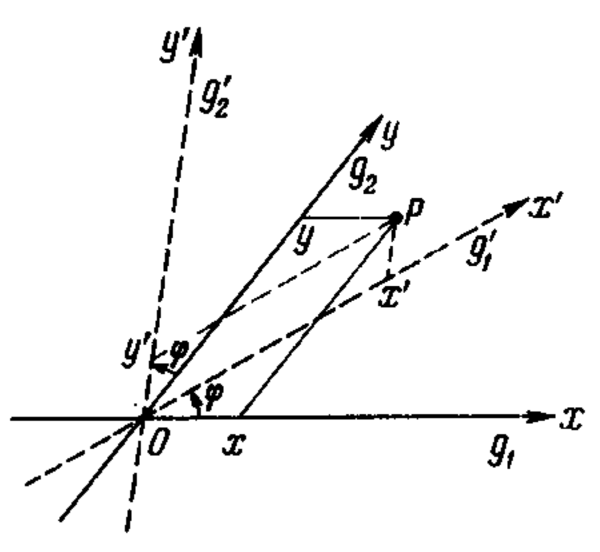


Рис. 2.72

Если $\omega = 90°$ (поворот декартовой системы координат на угол φ), то получаем

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Пусть Σ – прямолинейная система координат с координатным углом ω, Σ_1 – прямолинейная система координат с координатным углом ω_1, Σ_2 – полярная система координат, полярная ось которой Σ_2 совпадает с осью x в Σ. Пусть, далее, начала координат систем Σ и Σ_1 совпадают с полюсом системы Σ_2 (этого всегда можно добиться параллельным переносом систем координат Σ и Σ_1).

Тогда, если точка P, имеющая в этих трех системах координаты $P = (x, y)_\Sigma = (x_1, y_1)_{\Sigma_1} = (\rho, \varphi)_{\Sigma_2}$, задана только относительно одной системы координат, то ее координаты в других системах могут быть найдены по формулам

$$x = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} x_1 + \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega} y_1,$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega} x_1 + \frac{\sin\beta}{\sin\omega} y_1,$$

$$x_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} x - \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} y,$$

$$y_1 = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} x + \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} y,$$

$$x = \frac{\rho\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad y = \frac{\rho\sin\varphi}{\sin\omega},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y\sin\omega}{y\cos\omega + x};$$

где α – угол между положительными направлениями оси x в Σ и оси x_1 в Σ_1; β – угол между положительными направлениями оси x в Σ и оси y

в Σ_1 ($\omega'_1 = \beta - \alpha$; α, β считаются положительными при отсчете от полярной оси против часовой стрелки).

2.6.5.2. Координатные системы в пространстве.

2.6.5.2.1. Прямолинейные системы координат в пространстве. Прямолинейная система координат Σ в пространстве состоит из заданной фиксированной точки O пространства (*начала координат*) и трех прямых g_1, g_2, g_3, не лежащих в одной плоскости и пересекающихся в точке O,— *координатных осей* (осей x, y, z, или соответственно *оси абсцисс*, *оси ординат* и *оси аппликат*): $\Sigma = \{O;\ g_1,\ g_2,\ g_3\}$. Три плоскости, содержащие пары координатных осей, называются *координатными плоскостями* (плоскостями xy, xz и yz). На каждой из трех осей лучам, выходящим из точки O, приписываются положительное и отрицательное направления и на каждой прямой выбирается масштаб длины (рис. 2.73).

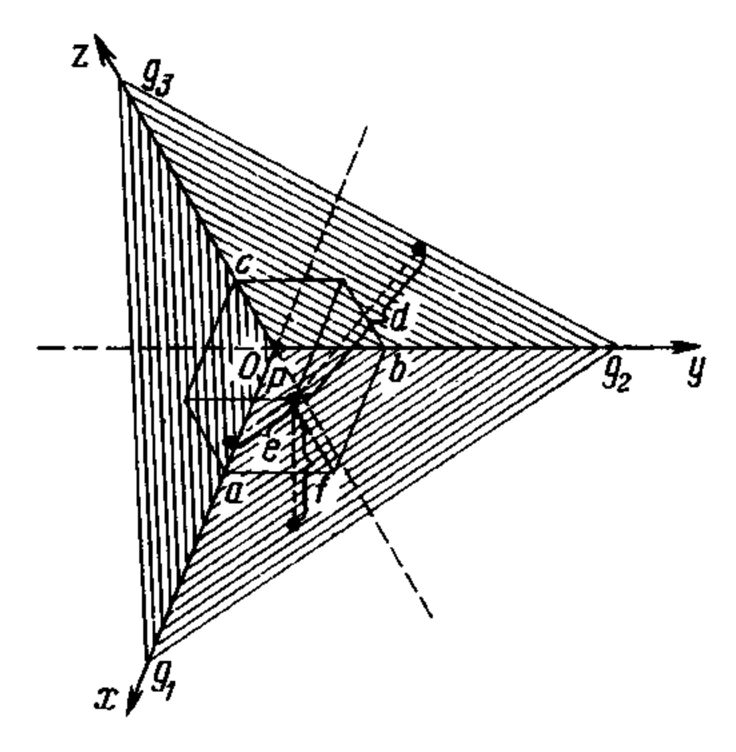


Рис. 2.73

Без ограничения общности можно считать, что масштабы длин всех трех осей равны (этого всегда можно добиться умножением масштаба каждой оси на соответствующее число). Пусть косинусы между положительными направлениями осей x, y и z (координатных углов) равны соответственно $\cos\angle(y, z) = w_1$, $\cos\angle(z, x) = w_2$ и $\cos\angle(x, y) = w_3$. При $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ система координат называется *прямоугольной* (или *декартовой*) *системой координат*; в противном случае система координат называется *косоугольной* *). В зависимости от взаимного расположения положительных направлений осей возможны *правая* и *левая* координатные системы (рис. 2.74). *Ковариантными координатами* точки P являются расстояния от точки до трех координатных плоскостей, взятые с соответствующими знаками.

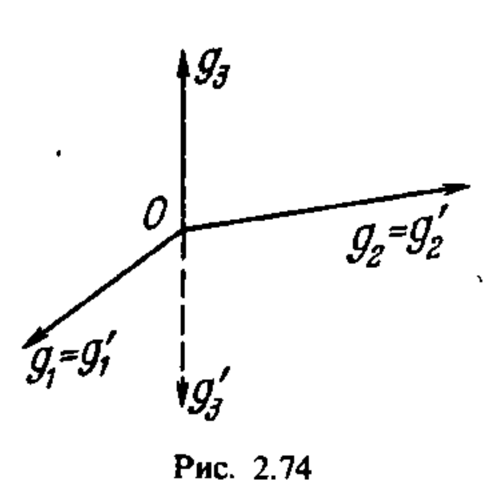


Рис. 2.74

Контравариантными координатами (параллельными координатами) точки P являются длины отрезков прямых, которые проектируют точку P поочередно на каждую из трех координатных плоскостей параллельно координатной оси, не лежащей в этой плоскости (см. рис. 2.73), взятые с соответствующими знаками. В декартовой системе координат ковариантные и контравариантные координаты совпадают. Координата точки положительна, если точка лежит по ту же сторону от координатной плоскости, проходящей через две координатные оси, куда указывает положительное направление третьей координатной оси. В противном случае координата точки отрицательна.

Пространство разбивается тремя координатными плоскостями на восемь октантов, знак каждой отдельной координаты в которых определяется в соответствии с таблицей:

Октант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Точка P с абсциссой a, ординатой b и аппликатой c относительно системы координат Σ записывается так: $P = P_\Sigma = (a,\ b,\ c)_\Sigma$. Если одновременно другие системы координат не используются, то индекс Σ можно опускать.

2.6.5.2.2. Криволинейные системы координат в пространстве. Криволинейные системы координат в пространстве являются обобщением прямолинейных. Они состоят из трех однопараметрических семейств поверхностей. Через каждую точку P пространства проходит только одна поверхность каждого семейства. Значения параметров для этих трех поверхностей и являются криволинейными координатами точки P.

Часто применяющимися криволинейными системами координат являются сферическая система координат и цилиндрическая система координат.

Сферическая система координат состоит из заданной фиксированной точки O (*полюса*) пространства, из ориентированной прямой g, проходящей через точку O, из полуплоскостей, ограниченных этой прямой (одна из них называется *полуплоскостью нулевого меридиана*), из конических поверхностей с вершинами в точке O и с прямой g в качестве оси и из сфер с центром в точке O. Параметром семейства сфер является радиус сферы ρ (*полярное расстояние*), параметром семейства полуплоскостей – угол φ, который полуплоскость образует с полуплоскостью нулевого меридиана (географическая *долгота*). Параметром семейства конических поверхностей является их угол раствора θ. Угол θ измеряется между положительным направлением прямой g и образующей боковой поверхности конуса (географическая *широта*). Положительные направления отсчета показаны на рис. 2.75. В сферических координатах точка P изображается в виде $P = (\rho,\ \varphi,\ \theta)$.

Цилиндрическая система координат состоит из заданной фиксированной точки O (начала координат), ориентированной прямой g, проходящей через эту точку, из плоскостей, перпендикулярных прямой g, из полуплоскостей, которые ограничены

*) См. сноску в 2.6.5.1.1.

прямой g (одна из них называется плоскостью *нулевого меридиана*), и из цилиндров, осью которых является прямая g. Параметром семейства перпендикулярных g плоскостей является расстояние z от точки O до плоскости: z положительно

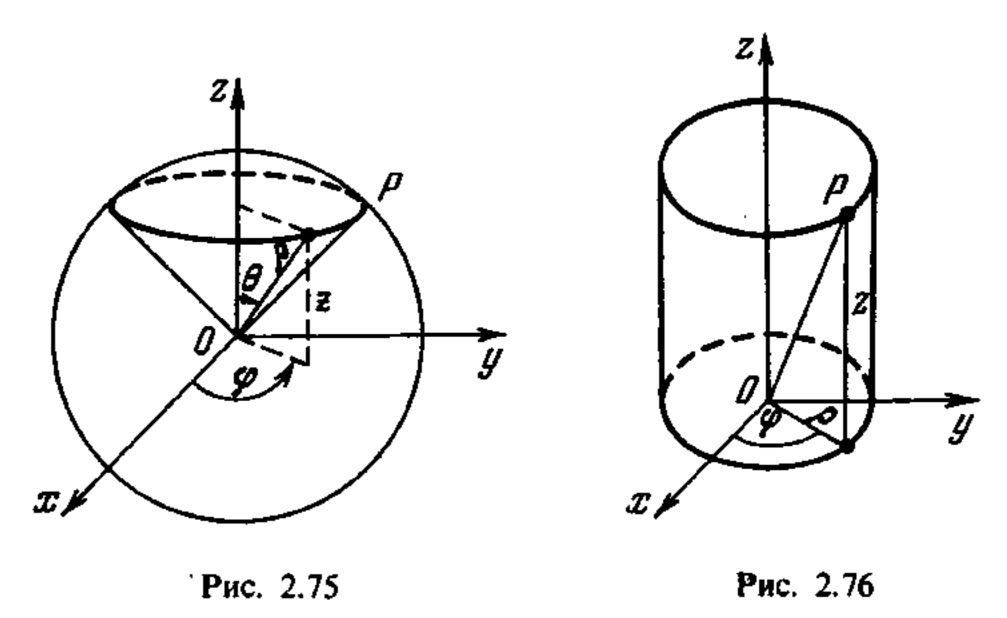


Рис. 2.75 Рис. 2.76

(отрицательно), если плоскость пересекает положительную (отрицательную) часть прямой g. Параметром пучка полуплоскостей является угол φ, который полуплоскость образует с полуплоскостью нулевого меридиана. Положительное направление отсчета показано на рис. 2.76. Параметром семейства цилиндров является радиус цилиндра ρ. В цилиндрической системе координат точка P изображается в виде $P = (\varphi, \rho, z)$.

2.6.5.2.3. Преобразование координат в пространстве.

Параллельный перенос. Система координат $\Sigma = \{O;\ g_1, g_2, g_3\}$ переносом на вектор $\overrightarrow{OQ}$ преобразуется в систему координат $\Sigma' = \{Q;\ g'_1, g'_2, g'_3\}$ с началом координат в точке $Q = (a, b, c)_\Sigma$ и координатными осями g'_1, g'_2 и g'_3, параллельными осям g_1, g_2 и g_3, при помощи следующих формул (рис. 2.77): $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$. При этом $P = (x, y, z)_\Sigma = (x', y', z')_{\Sigma'}$.

Рис. 2.77

Поворот системы координат. Поворот декартовой системы координат $\Sigma = \{O;\ g_1, g_2, g_3\}$ вокруг проходящей через начало координат оси g с направляющими косинусами

$$\cos\angle(g_1, g) = \alpha,\ \cos\angle(g_2, g) = \beta,\ \cos\angle(g_3, g) = \gamma$$

на угол θ переводит ее в систему координат $\Sigma' = \{O;\ g'_1, g'_2, g'_3\}$ (рис. 2.78) при помощи следующих формул перехода:

$$x' = x(\cos\theta + \alpha^2(1-\cos\theta)) + y(\gamma\sin\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta)) + z(-\beta\sin\theta + \alpha\gamma(1-\cos\theta)),$$

$$y' = x(-\gamma\sin\theta + \beta\alpha(1-\cos\theta)) + y(\cos\theta + \beta^2(1-\cos\theta)) + z(\alpha\sin\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta)),$$

$$z' = x(\beta\sin\theta + \gamma\alpha(1-\cos\theta)) + y(-\alpha\sin\theta + \gamma\beta(1-\cos\theta)) + z(\cos\theta + \gamma^2(1-\cos\theta)).$$

Здесь $P = (x, y, z)_\Sigma = (x', y', z')_{\Sigma'}$.

Если известны направляющие косинусы углов между осями декартовых систем Σ и Σ' с общим началом, то имеют место формулы:

$$x' = l_1x + m_1y + n_1z,\quad y' = l_2x + m_2y + n_2z,$$
$$z' = l_3x + m_3y + n_3z,$$

где l_i, m_i, n_i $(i = 1, 2, 3)$ – направляющие косинусы.

В векторной форме:

$$x' = xA,$$

где

$$x' = (x', y', z'),\quad x = (x, y, z).$$

Матрица перехода

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

является ортогональной (см. 2.4.4.2.5).

Если заданы две системы координат Σ и Σ' с совпадающими началами координат и известны косинусы углов между положительными направлениями осей системы Σ (оси x, y, z) и системы

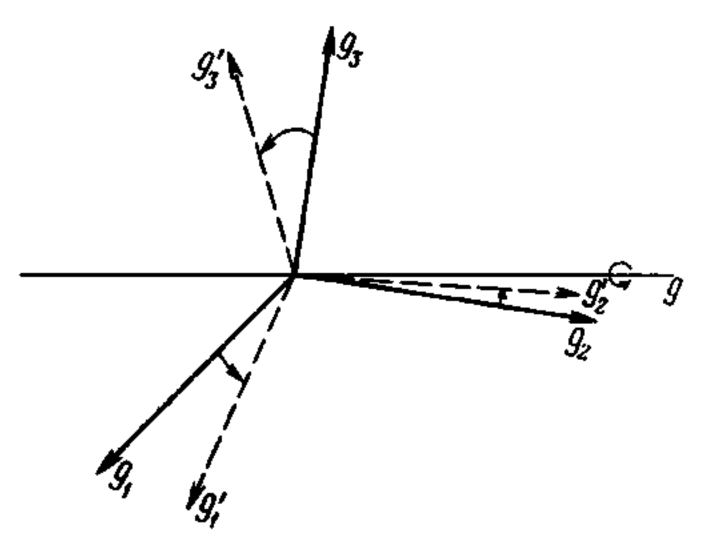


Рис. 2.78

Σ (оси x', y', z'), а также косинусы w_1, w_2, w_3 координатных углов системы Σ (см. 2.6.5.2.1), то, зная положение точки P в системе Σ', можно вычислить положение той же точки в системе Σ по нижеследующим формулам.

Пусть $P = (x, y, z)_\Sigma = (x', y', z')_{\Sigma'}$; тогда

$$x = \frac{(1-w_1^2)X - (w_3 - w_1w_2)Y - (w_2 - w_3w_1)Z}{\delta^2},$$

$$y = \frac{(1-w_2^2)Y - (w_1 - w_2w_3)Z - (w_3 - w_1w_2)X}{\delta^2},$$

$$z = \frac{(1-w_3^2)Z - (w_2 - w_3w_1)X - (w_1 - w_2w_3)Y}{\delta^2},$$

где $\delta^2 = 1 + 2w_1w_2w_3 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2$,

$$X = x'\cos\angle(x', x) + y'\cos\angle(y', x) + z'\cos\angle(z', x),$$
$$Y = x'\cos\angle(x', y) + y'\cos\angle(y', y) + z'\cos\angle(z', y),$$
$$Z = x'\cos\angle(x', z) + y'\cos\angle(y', z) + z'\cos\angle(z', z).$$

Пусть декартова (Σ), цилиндрическая (Σ_1) и сферическая (Σ_2) системы координат *согласованы:* начала координат систем Σ, Σ_1 и Σ_2 совпадают, главные прямые g систем Σ_1 и Σ_2 совпадают с осью z системы Σ, ограниченные прямой g полуплоскости нулевого меридиана систем Σ_1 и Σ_2 содержат положительную часть оси x системы Σ.

Тогда координаты точки P относительно трех систем Σ, Σ_1 и Σ_2 связаны друг с другом следующими формулами.

Если $P=(x,\ y,\ z)_\Sigma=(\rho,\ \varphi,\ z)_{\Sigma_1}=(\bar\rho,\ \varphi,\ \theta)_{\Sigma_2}$, то

$$x=\rho\cos\varphi=\bar\rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi=\bar\rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=z=\bar\rho\cos\theta,$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \bar\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

2.6.6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аффинное n-мерное пространство A_n над векторным пространством V_n есть множество A_n, каждой паре элементов которого P_1, P_2 поставлен в соответствие вектор из V_n, обозначаемый далее $\overline{P_1P_2}$, причем 1) для любых $P_1\in A_n$, $x\in V_n$ существует один и только один элемент $P_2\in A_n$, для которого $\overline{P_1P_2}=x$; 2) $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_3}$ для всех P_1, P_2, $P_3\in A_n$. Элементы A_n называются его *точками*; вектор $\overline{P_1P_2}$ называется вектором *переноса* из точки P_1 в точку P_2.

Подмножество $L\subset A_n$ называется *плоскостью* в A_n, если вместе с точками P_0, P_1, ..., P_n оно содержит также любую такую точку P, что $\overline{P_0P}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{P_0P_1}$, ..., $\overline{P_0P_n}$. Размерность подпространства V_n, порожденного векторами $\overline{P_0P}$, P_0, $P\in L$, называется размерностью плоскости L. *Гиперплоскостью* называется плоскость размерности $(n-1)$.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве относительно системы координат двумерного или трехмерного аффинного пространства или относительно прямолинейной параллельной системы координат отличается весьма незначительно. Как наиболее часто применяемой в дальнейшем прямолинейной параллельной системе координат будет отдаваться предпочтение.

2.6.6.1. Аналитическая геометрия на плоскости *). *Расстояние* d между двумя точками в параллельных или полярных координатах $P_1=(x_1,\ y_1)_{\Sigma_1}=(\rho_1,\ \varphi_1)_{\Sigma_2}$ и $P_2=(x_2,\ y_2)_{\Sigma_1}=(\rho_2,\ \varphi_2)_{\Sigma_2}$ вычисляется по следующим формулам:

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

В декартовых координатах $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

В последующем (если нет специальной оговорки) всегда имеются в виду декартовы координаты.

Координаты *середины* отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

*) Векторное изображение (представление в векторной записи) дается только в 2.6.6.2. Оно совпадает с представлением (векторным изображением) в векторной записи для плоскости, если опускаются последняя компонента векторов и последняя строка и последний столбец матриц.

Координаты точки P, которая *делит отрезок* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *в отношении* $\dfrac{m}{n}=\dfrac{d(P_1,\ P)}{d(P,\ P_2)}=\lambda$:

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

При $\lambda<0$ точка P лежит вне отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$. Координаты *центра тяжести* системы из n материальных точек $P_i=(x_i,\ y_i)$ с массами m_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$:

$$x=\frac{\sum_{i=1}^n m_ix_i}{\sum_{i=1}^n m_i},\qquad y=\frac{\sum_{i=1}^n n_iy_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Ориентированная площадь S *многоугольника* с вершинами в точках P_1, ..., P_n:

$$S=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+$$
$$+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\ldots+(x_n-x_1)(y_n+y_1)].$$

Ориентированная площадь треугольника с вершинами в точках P_1, P_2, P_3:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

При вычислении по этим формулам площадь получается положительной, если обход вершин в порядке нумерации происходит против часовой стрелки, и отрицательной в противном случае. Если $S=0$, то P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой (необходимое и достаточное условие).

2.6.6.1.1. Прямая. Каждая прямая на плоскости в параллельных координатах представима в виде $Ax+By+C=0$, а в полярных координатах — в виде $\rho\cos(\varphi-\alpha)=p$, где p — расстояние от полюса до прямой, α — угол между полярной осью и нормалью к прямой.

Если $A=0$ $(B=0)$, то прямая параллельна оси x (оси y). Если $C=0$, то прямая проходит через начало координат.

Если $B\neq0$, то равенство $Ax+By+C=0$ можно записать в виде $y=kx+b$. Прямая пересекает ось y в точке $P=(0,\ b)$.

В декартовой системе координат k — *угловой коэффициент* прямой: $k=\operatorname{tg}\alpha$ (α — угол между осью x и прямой).

Прямая может быть задана точкой $P_1=(x_1,\ y_1)$ и угловым коэффициентом k или двумя точками $P_1=(x_1,\ y_1)$ и $P_2=(x_2,\ y_2)$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении: $y-y_1=k(x-x_1)$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Имеет место равенство $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Прямая пересекает ось x в точке $A=(a,\ 0)$ и ось y в точке $B=(0,\ b)$.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, где p — расстояние от прямой до начала координат, а α — угол между нормалью к прямой и осью x.

Нормальное уравнение прямой можно получить из уравнения $Ax + By + C = 0$, умножив его на нормирующий множитель $\mu = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2}$. Знак μ должен быть противоположен знаку C. Косинусы углов, образуемых прямой с осями координат, называются *направляющими косинусами*. Если $\angle$ (ось x, прямая) $= \gamma$ и $\angle$ (ось y, прямая) $= \delta$, то $\cos\delta = \cos(90° - \gamma) = \sin\gamma$, $\cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$.

Расстояние d от точки $P_1 = (x_1, y_1)$ до прямой, задаваемой уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, равно модулю числа $d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$ (подстановка координат точки в нормированное уравнение прямой). По этой формуле d положительно, если точка P_1 и начало координат лежат по разные стороны от прямой. В противном случае d отрицательно.

Координаты (x_0, y_0) точки пересечения двух прямых, задаваемых уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, то прямые параллельны ($k_1 = k_2$, или $A_1/A_2 = B_1/B_2$). Угол φ пересечения двух прямых (отсчитываемый против часовой стрелки) находится из любого из соотношений

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}.$$

При $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ прямые перпендикулярны.

Прямая $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ проходит через точку пересечения этих прямых, если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.6.6.1.2. Кривые 2-го порядка. *Кривой 2-го порядка* на плоскости называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (2.98)$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

В матричной форме:

$$rAr^T + 2gr^T + f = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

$$g = (d, e), \qquad r = (x, y).$$

После приведения уравнения кривой к каноническому виду (см. 2.6.6.2) кривые могут быть классифицированы следующим образом (условие $\lambda_1 > 0$ всегда может быть достигнуто заменой переменных или умножением обеих частей уравнения на -1).

1-й случай. *Центральные кривые* (существует центр симметрии). Общее уравнение кривой в каноническом виде: $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + g = 0$, где $\lambda_1 > 0$.

Классификация происходит согласно следующей таблице:

λ_2	g	Вид кривой
>0	<0	эллипс (рис. 2.79)
>0	>0	в действительных числах уравнение не имеет решения (мнимый эллипс)
>0	0	одна точка (0, 0) (пара мнимых пересекающихся прямых или вырожденный эллипс)
<0	$\neq 0$	гипербола (рис. 2.88)
<0	0	пара пересекающихся прямых

2-й случай. *Параболические кривые* (центра симметрии нет). Общее уравнение кривой в каноническом виде (с $\lambda_1 > 0$): $\lambda_1x^2 + 2hy + k = 0$.

Классификация происходит согласно следующей таблице:

h	k	Вид кривой
$\neq 0$	любое	парабола (рис. 2.96)
0	<0	пара прямых, параллельных оси y
0	0	двойная прямая (ось y)
0	>0	пара мнимых параллельных прямых

Кривые 2-го порядка на плоскости часто называются *коническими сечениями*, так как они могут быть получены в сечении плоскостью прямого кругового конуса. Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет гиперболой, параболой или эллипсом соответственно в зависимости от того, параллельна ли секущая плоскость двум или одной образующей конуса или не параллельна ни одной. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то получаются распадающиеся конические сечения. Параллельные прямые получаются, если конус вырождается в цилиндр (вершина конуса уходит в бесконечность).

Кривые 2-го порядка могут быть также определены при помощи *фокального свойства*: кривая 2-го порядка есть геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до заданной точки F (*фокуса*) и до заданной прямой (*директрисы*) есть величина постоянная, равная e (*эксцентриситету*). При $e < 1$ получается *эллипс*, при $e = 1$ — *парабола*, при $e > 1$ — *гипербола*.

Кривая 2-го порядка однозначно определяется заданием пяти *точек общего положения*: через заданные пять точек проходит одна и только одна кривая 2-го порядка. Если хотя бы три точки лежат на одной прямой, то получается распадающееся коническое сечение.

Полярное уравнение. В полярных координатах кривые 2-го порядка имеют уравнение

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

(p – параметр, e – эксцентриситет данной кривой, полюс находится в фокусе, полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине). Для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь.

Рис. 2.79

Последующие рассмотрения относятся к кривым 2-го порядка в каноническом виде.

Эллипсом называется множество (геометрическое место) всех точек $M = (x, y)$, для которых сумма расстояний до двух заданных фиксированных точек $F_1 = (+c, 0)$ и $F_2 = (-c, 0)$ (*фокусов*) постоянна (равна $2a$) (рис. 2.79). Расстояния $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ вычисляются по формулам

$$r_1 = a - ex, \qquad r_2 = a + ex.$$

Элементами эллипса являются: большая ось $AB = 2a$; малая ось $CD = 2b$; вершины A, B, C и D; фокусы $F_1 = (+c, 0)$ и $F_2 = (-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; *эксцентриситет* $e = c/a$ ($e < 1$); *фокальный параметр* $p = b^2/a$ (половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси).

Каноническое уравнение эллипса (координатные оси совпадают с осями эллипса) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрическое задание имеет вид

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

В *полярных координатах* (связанных с фокусом) имеем

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad 0 \leqslant e < 1.$$

Директрисы – прямые, параллельные малой оси и находящиеся на расстоянии $d = a/e$ от нее

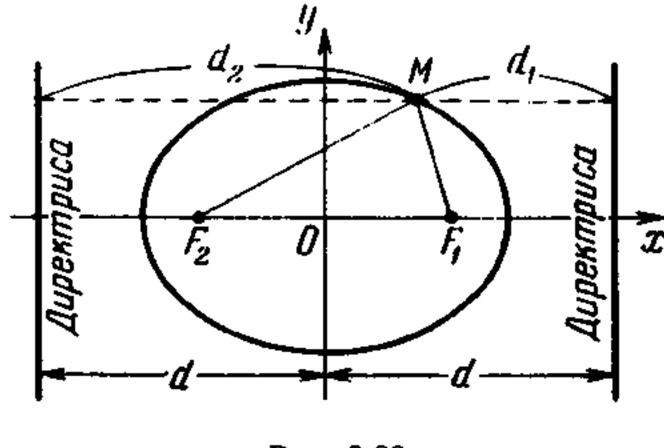
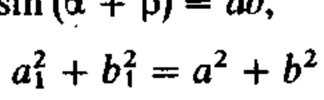


Рис. 2.80

(рис. 2.80). Для любой точки эллипса $M = (x, y)$ справедливо соотношение $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e$.

Диаметры – хорды, проходящие через центр эллипса; они делятся в центре пополам (рис. 2.81). Геометрическим местом середин хорд, параллельных одному из диаметров эллипса, снова является диаметр, который называется *сопряженным* заданному. Если k и k' – угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров, то $kk' = -b^2/a^2$. Далее, если длины двух сопряженных диаметров равны $2a_1$ и $2b_1$, а α и β – острые углы между диаметрами и большой осью ($k = -\operatorname{tg}\alpha$, $k' = \operatorname{tg}\beta$), то



$$a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta) = ab,$$

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

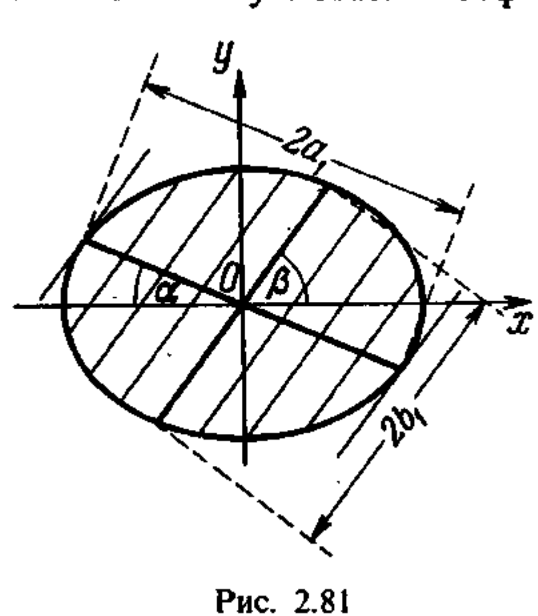


Рис. 2.81

(*теорема Аполлония*).

Касательная к эллипсу в точке $M = (x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Нормаль и касательная к эллипсу в точке M являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов, образованных радиусами-векторами, проведенными из фокусов эллипса в эту точку (рис. 2.82). Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса тогда и только тогда, когда $A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0$.

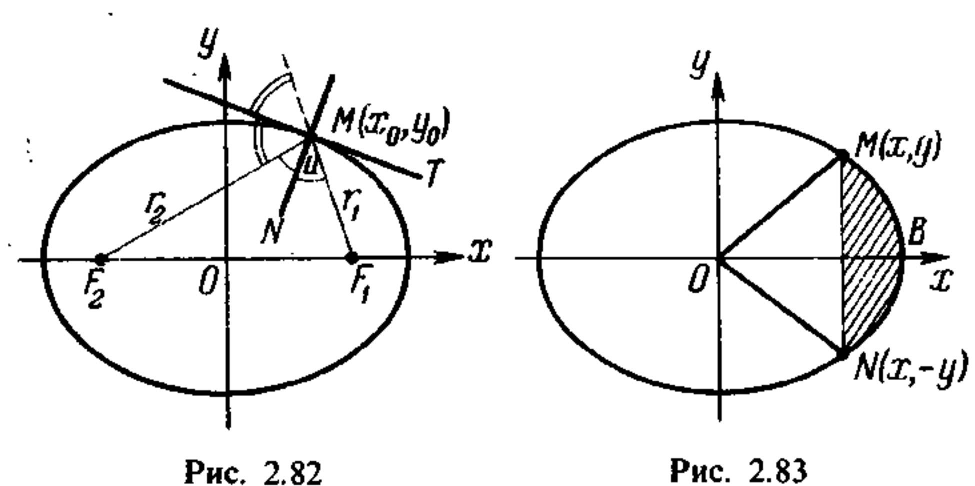


Рис. 2.82 Рис. 2.83

Радиус кривизны R в точке $M = (x_0, y_0)$ (см. рис. 2.82):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\cos^3 u},$$

где u – угол между нормалью и радиусом-вектором, проведенным из фокуса в точку M ее пересечения с эллипсом.

Для вершин A и B (см. рис. 2.79) $R = b^2/a = p$; для вершин C и D $R = a^2/b$.

Площадь: $S = \pi ab$. Площадь сектора: $BOM = \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}$ (рис. 2.83). Площадь сегмента: $MBN = ab\arccos\frac{x}{a} - xy$.

Длина эллипса:

$$L = 4aE(e) = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5} - \ldots\right],$$

где $E(e) = E(e, \pi/2)$ – полный эллиптический интег-

рал 2-го рода. Если положить $\dfrac{a-b}{a+b}=\lambda$, то

$$L=\pi(a+b)\left[1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{64}+\frac{\lambda^6}{256}+\frac{25\lambda^8}{16\,384}+\ldots\right].$$

Приближенные формулы:

$$L\approx\pi\left[1{,}5(a+b)-\sqrt{ab}\right],$$

$$L\approx\pi(a+b)\frac{64-3\lambda^4}{64-16\lambda^2}.$$

Окружность – частный случай эллипса ($a=b$), так что ее свойства вытекают из свойств эллипса. Оба фокуса совпадают с центром окружности ($c=0$).

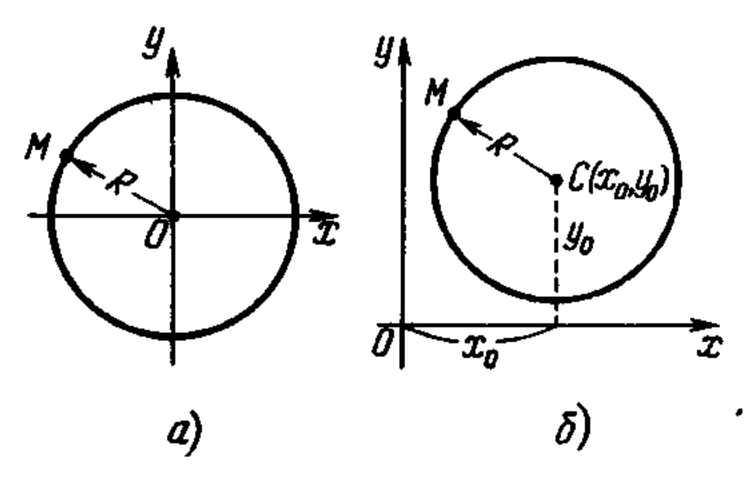


Рис. 2.84

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R (рис. 2.84, *а*): $x^2+y^2=R^2$.

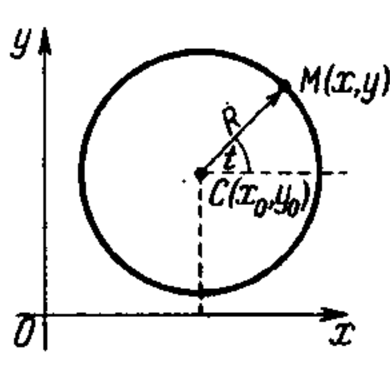


Рис. 2.85

Уравнение окружности с центром в точке $C=(x_0,\ y_0)$ и радиусом R (рис. 2.84, *б*);

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2;$$

в *параметрической форме* (рис. 2.85):

$$x=x_0+R\cos t,$$
$$y=y_0+R\sin t,$$

где t – угол, образованный подвижным радиусом с положительным направлением оси Ox, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Уравнение (2.98) описывает окружность тогда и только тогда, когда $b=0$, $a=c\neq 0$ и $e^2+d^2-af>0$. Канонический вид уравнения (рис. 2.84) в этом случае: $x^2+y^2=R^2$.

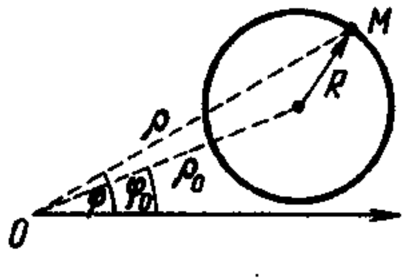


Рис. 2.86

Рис. 2.87

Уравнение окружности в *полярных координатах* имеет вид (рис. 2.86)

$$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=R^2;$$

здесь $(\rho_0,\ \varphi_0)$ – полярные координаты центра окружности. Если центр лежит на полярной оси и окружность проходит через полюс (рис. 2.87), то уравнение принимает вид $\rho=2R\cos\varphi$.

Гиперболой называется множество точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных фиксированных точек $F_1=(+c,\ 0)$ и $F_2=(-c,\ 0)$ (*фокусов*) постоянна (равна $2a<2c$).

Точки, для которых $r_1-r_2=2a$ ($r_1=|\overrightarrow{MF_1}|$, $r_2=|\overrightarrow{MF_2}|$), принадлежат одной ветви гиперболы (на рис. 2.88 – *левой*); точки, для которых $r_2-r_1=2a$, принадлежат другой (*правой*) ветви.

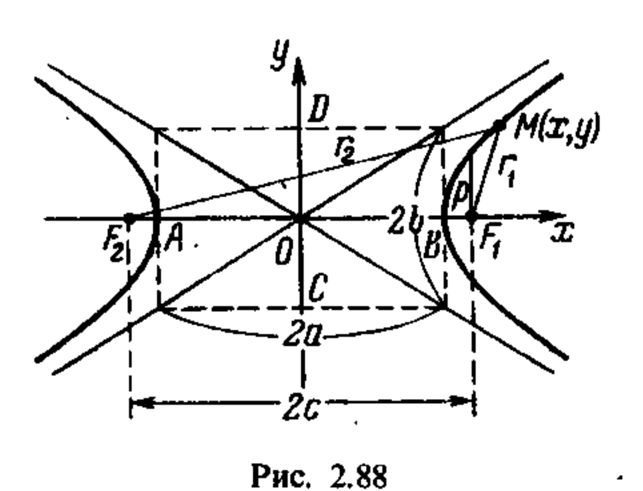


Рис. 2.88

Расстояния r_1 и r_2 вычисляют по формулам $r_1=\pm(ex-a)$, $r_2=\pm(ex+a)$. Верхний знак соответствует правой ветви, нижний – левой.

Элементы гиперболы: *действительная ось* $AB=2a$; *вершины* A, B; *центр* O; *фокусы* F_1, F_2, лежащие на действительной оси по обе стороны от центра на расстоянии $c\,(>a)$ от него; *мнимая ось* $CD=2b$ $(b=\sqrt{c^2-a^2})$; *фокальный параметр* $p=b^2/a$ (половина хорды, проведенной через фокус перпендикулярно действительной оси) и $e=c/a>1$ – *эксцентриситет* (см. рис. 2.88).

Каноническое уравнение гиперболы (оси координат совпадают с осями гиперболы) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение в *параметрической форме*: $x=a\operatorname{ch}t$, $y=b\operatorname{sh}t$, $-\infty<t<+\infty$.

Уравнение в *полярных координатах*:

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},\quad e>1.$$

Директрисы – прямые, перпендикулярные действительной оси и пересекающие ее на расстоянии $d=a/e$ от центра (рис. 2.89). Для любой точки $M(x,\ y)$ гиперболы $\dfrac{r_1}{d_1}=\dfrac{r_2}{d_2}=e$.

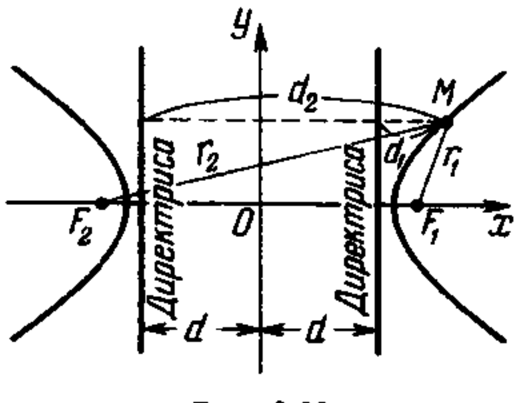


Рис. 2.89

Касательная к гиперболе в точке $M(x_0,\ y_0)$ имеет уравнение $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$. Касательная и нормаль к гиперболе являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов, образованных радиусами-векторами, проведенными

из фокусов в точку касания (рис. 2.90). Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы тогда и только тогда, когда $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

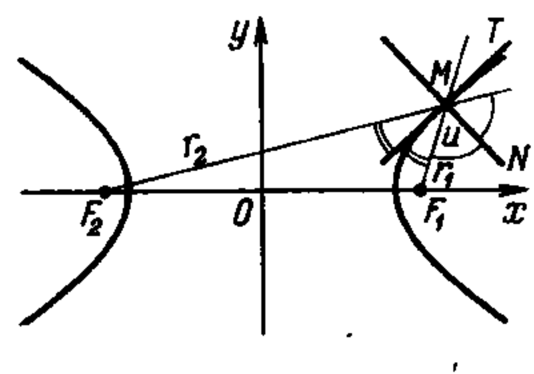


Рис. 2.90

Асимптоты гиперболы (рис. 2.91) – прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность. Угловые коэффициенты асимптот: $k = \pm \operatorname{tg}\delta = \pm b/a$. Уравнения обеих асимптот: $y = \pm \dfrac{b}{a}x$.

Отрезок касательной TT_1 между асимптотами делится точкой касания пополам: $TM = MT_1$. Площадь треугольника TOT_1 между касательной

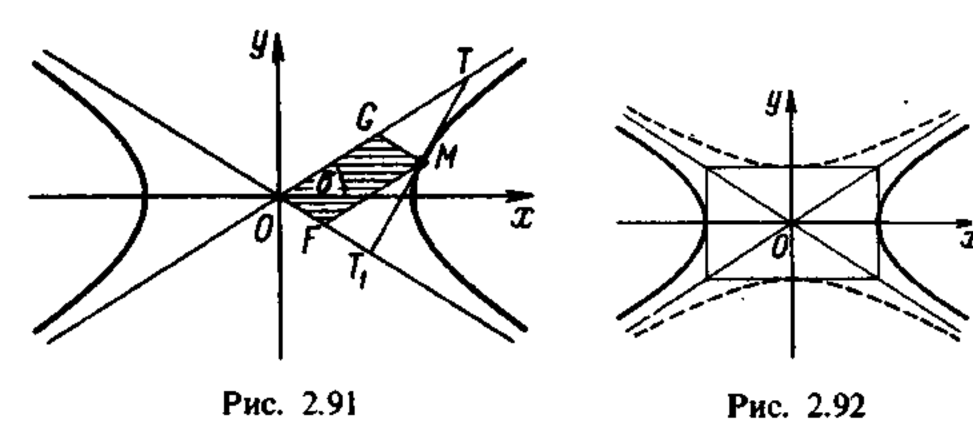


Рис. 2.91 Рис. 2.92

и обеими асимптотами равна ab (для любой точки гиперболы M). Если через точку M провести две прямые MF и MG, параллельные асимптотам, то площадь параллелограмма $OFMG$ равна $\dfrac{a^2 + b^2}{4} = \dfrac{c^2}{4}$.

Сопряженные гиперболы (рис. 2.92)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

(вторая изображена на рис. 2.92 штриховой линией) имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них равна мнимой оси другой, и наоборот.

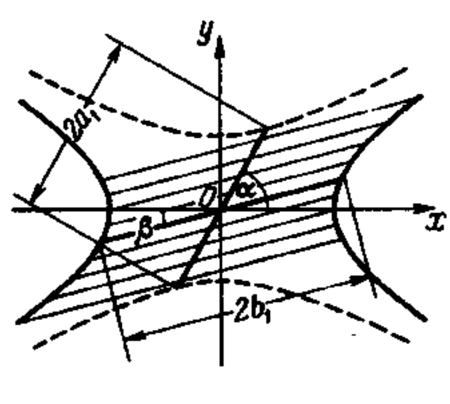


Рис. 2.93

Диаметры – хорды данной и сопряженной ей гипербол, проходящие через их общий центр; они делятся в центре пополам. Два диаметра с угловыми коэффициентами k и k' называются *сопряженными*, если $b^2/a^2 = kk'$. Каждый из обоих диаметров делит хорды данной или сопряженной ей гиперболы, параллельные другому диаметру, на две равные части *) (рис. 2.93). Если длины сопряженных диаметров равны $2a_1$ и $2b_1$, а α и β – острые углы, образованные этими диаметрами с действительной осью ($\alpha > \beta$), то

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2, \qquad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta).$$

Радиус кривизны R в точке $M = (x_0, y_0)$ (см. рис. 2.90):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\cos^3 u},$$

где u – угол между нормалью и радиусом-вектором, проведенным из фокуса в точку касания. В вершинах A и B (см. рис. 2.88) $R = p = b^2/a$.

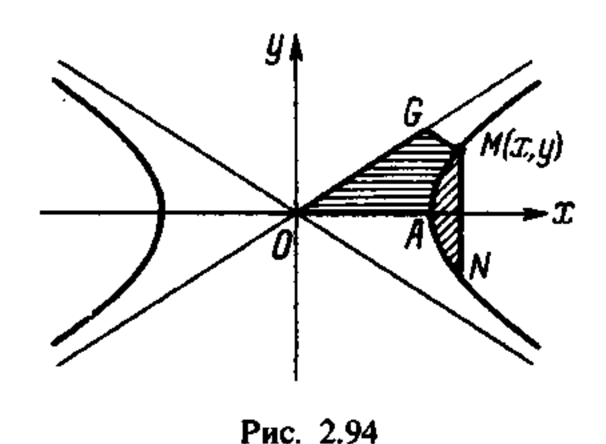


Рис. 2.94

Площадь сегмента гиперболы (рис. 2.94):

$$AMN = xy - ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = xy - ab\operatorname{Arch}\frac{x}{a}.$$

Площадь $OAMG = \dfrac{ab}{4} + \dfrac{ab}{2}\ln\dfrac{2|\overrightarrow{OG}|}{c}$ (отрезок MG параллелен асимптоте).

Равнобочная гипербола имеет равные оси: $a = b$. Ее уравнение: $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равнобочных гипербол перпендикулярны друг другу. Если выбрать асимптоты в качестве осей координат (рис. 2.95), то уравнение равнобочной гиперболы будет иметь вид $xy = a^2/2$.

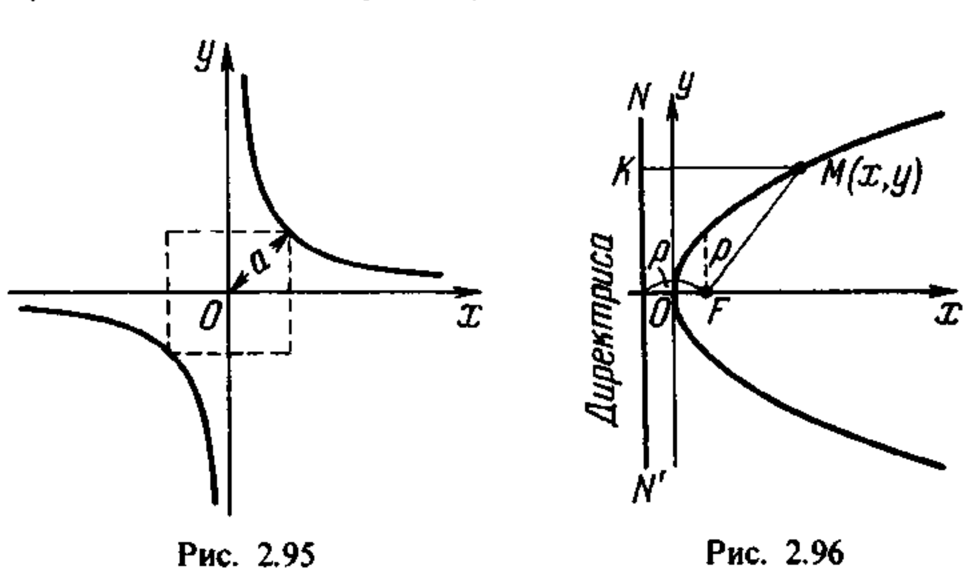


Рис. 2.95 Рис. 2.96

Парабола – это множество точек $M = (x, y)$, равноудаленных от фиксированной точки (*фокуса*) $F = (p/2, 0)$ и от данной прямой (*директрисы*) (рис. 2.96): $|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MK}| = x + \dfrac{p}{2}$.

Элементы параболы: ось x – *ось параболы*, *вершина* O, *фокус* $F = (p/2, 0)$, *директриса* (прямая, перпендикулярная оси x; уравнение: $x = -p/2$) и *фокальный параметр* p (расстояние от фокуса до директрисы, или половина хорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси x). *Эксцентриситет* параболы e равен единице.

*) Из двух сопряженных диаметров только один (для которого $|k| < b/a$) пересекает данную гиперболу. Получающаяся при этом хорда – диаметр в узком смысле слова – делится в центре пополам.

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$ (см. рис. 2.96); в *полярных координатах*: $\rho = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$; с осью, параллельной оси y: $y = ax^2 + bx + c$. Фокальный параметр параболы, задаваемый последним уравнением: $p = 1/(2\,|a|)$. При $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз (рис. 2.97), при $a < 0$ – вершиной вверх; координаты вершины: $x_0 = -b/(2a)$, $y_0 = (4ac - b^2)/(4a)$.

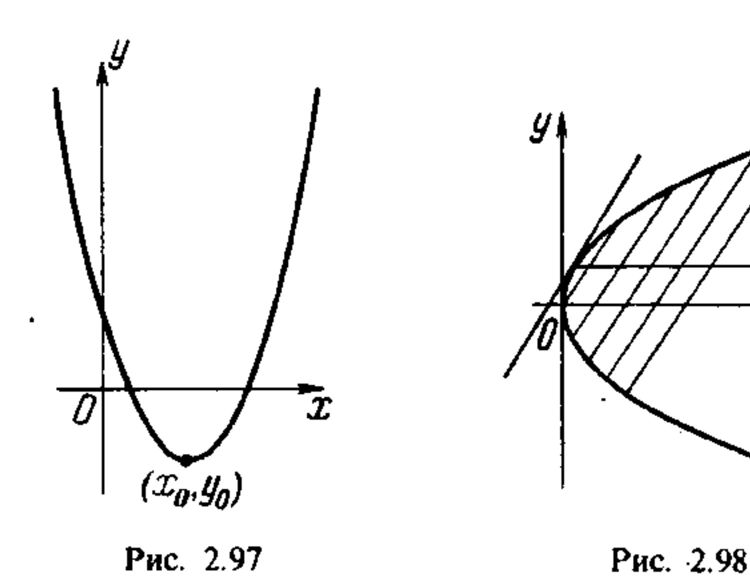


Рис. 2.97 Рис. 2.98

Под *диаметром* параболы понимают прямую, параллельную оси параболы. Диаметр делит пополам хорды, параллельные касательной, проведенной в конце диаметра (рис. 2.98). Если угловой коэффициент этих хорд равен k, то уравнение диаметра имеет вид $y = p/k$.

Уравнение *касательной* (рис. 2.99) к параболе в точке $M = (x_0, y_0)$: $yy_0 = p(x + x_0)$. Касательная и нормаль к параболе являются биссектрисами углов между фокальным радиусом-вектором точки параболы и диаметром, проходящим через эту же точку. Отрезок касательной к параболе между точками касания и пересечения с осью параболы (осью x) делится пополам касательной, проведенной через вершину параболы (осью y):

$$TS = SM, \qquad TF = FM, \qquad TO = OP = x_0.$$

Прямая $y = kx + b$ касается параболы тогда и только тогда, когда $p = 2bk$.

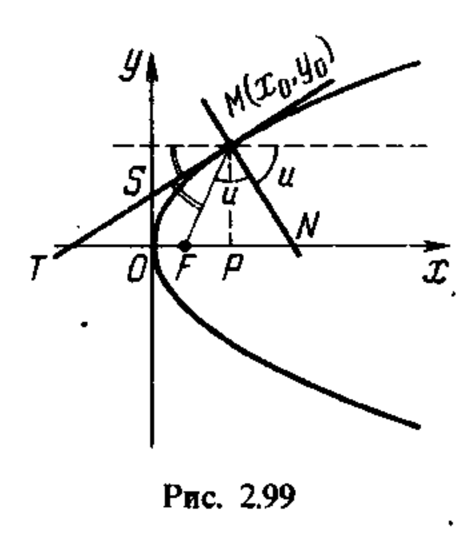


Рис. 2.99

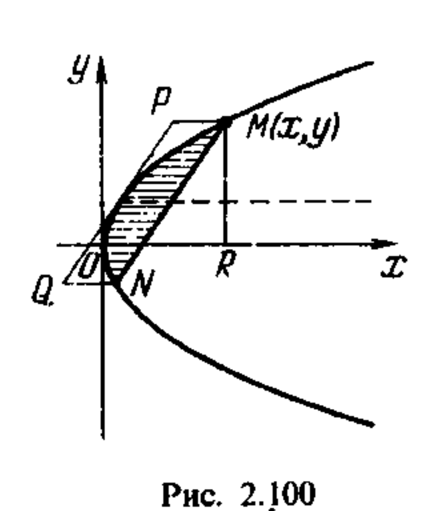


Рис. 2.100

Радиус кривизны параболы в точке $M = (x_1, y_1)$:

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\cos^3 u} = \frac{n^3}{p^2},$$

где $n = |\overrightarrow{MN}|$ – длина нормали $\overrightarrow{MN}$ (рис. 2.99). В вершине O радиус кривизны $R = p$.

Площадь сегмента параболы MON равна двум третям площади параллелограмма $PQNM$ (рис. 2.100). Площадь $OMR = \dfrac{2}{3}xy$.

Длина дуги параболы от вершины O до точки $M = (x, y)$:

$$OM = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] = \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Приближенно при малых значениях $\dfrac{x}{y}$

$$L_{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

2.6.6.2. Аналитическая геометрия в пространстве. *Расстояние* между двумя точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ в параллельной системе координат равно

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)w_1 + 2(z_2 - z_1)(x_2 - x_1)w_2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)w_3]^{1/2},$$

где w_1, w_2, w_3 – косинусы координатных углов (см. 2.6.5.2.1). В декартовых координатах

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты *середины отрезка* $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Координаты точки P, которая *делит отрезок* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *в отношении* $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}} = \lambda$:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$
$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$
$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если $\lambda < 0$, то точка P лежит вне отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$. *Координаты центра тяжести* $P(x, y, z)$ системы n материальных точек $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ с массами m_i:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ориентированный объем треугольной пирамиды с вершинами в точках P_1, P_2, P_3 и P_4:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}.$$

Объем положителен, если ориентация тройки векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$ совпадает с ориента-

цией системы координат. Если $V = 0$, то четыре точки лежат в одной плоскости (необходимое и достаточное условие).

В дальнейшем мы будем рассматривать только декартовы системы координат.

2.6.6.2.1. Прямая. Каждая *прямая в пространстве* может быть задана системой линейных уравнений относительно координат (пересечение двух плоскостей, рис. 2.101):

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2.99)$$

Или *в векторной форме*:

$$\mathbf{r}\mathbf{N}_1 + D_1 = 0, \qquad \mathbf{r}\mathbf{N}_2 + D_2 = 0,$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{N}_i = (A_i, B_i, C_i)$ $(i = 1, 2)$.

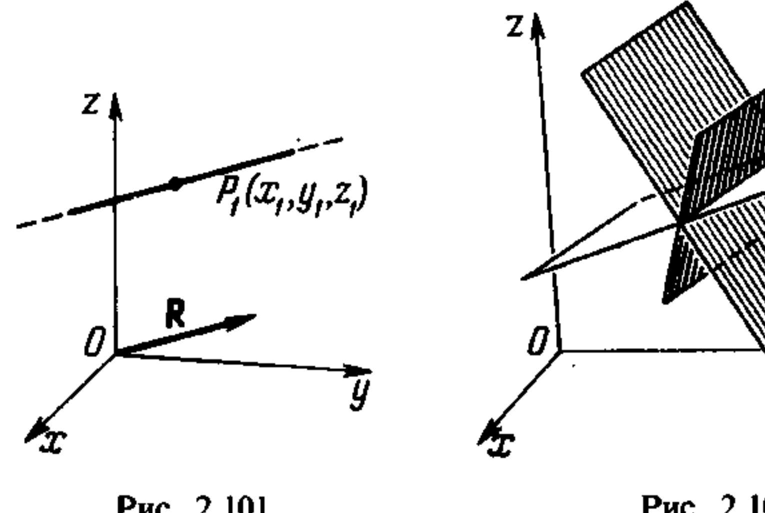


Рис. 2.101 Рис. 2.102

Прямая может быть задана точкой $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и параллельным ей вектором (*направляющим вектором*) $\mathbf{R} = (l, m, n)$ (рис. 2.102). Тогда *уравнение прямой в координатной форме* имеет вид*)

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}; \qquad (2.100)$$

в векторной форме:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}\lambda,$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$;

в параметрическом виде:

$$x = x_1 + l\lambda, \quad y = y_1 + m\lambda, \quad z = z_1 + n\lambda.$$

При этом между (2.99) и (2.100) существует следующая связь:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Прямая однозначно определяется двумя точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. *Уравнение прямой:*

в координатной форме (см. сноску):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \qquad (2.101)$$

в векторной форме:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

где $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ есть направляющий вектор $\mathbf{R}$ прямой:

$$\mathbf{R} = (l, m, n) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Расстояние d от точки $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ *до прямой*, заданной в виде (2.100), вычисляется по формуле

$$d^2 = \frac{1}{l^2 + m^2 + n^2}\{[(x_3 - x_1)m - (y_3 - y_1)l]^2 + [(y_3 - y_1)n - (z_3 - z_1)m]^2 + [(z_3 - z_1)l - (x_3 - x_1)n]^2\}.$$

Кратчайшее расстояние d между двумя прямыми, заданными уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},\qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

может быть вычислено по формуле

$$d = \frac{\pm\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}. \qquad (2.102)$$

Две прямые пересекаются тогда и только тогда, когда стоящий в числителе формулы (2.102) определитель обращается в нуль ($d = 0$). Если уравнения обеих прямых объединить в систему и решить ее относительно x, y, z, то будут получены координаты точки пересечения. Угол пересечения двух прямых равен углу между направляющими векторами $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ этих прямых;

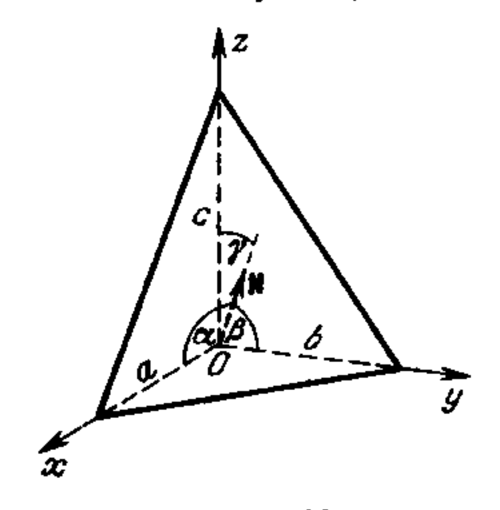


Рис. 2.103

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|}.$$

2.6.6.2.2. Плоскость. Каждую *плоскость в пространстве* можно задать линейным уравнением относительно координат (рис. 2.103):

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2.103)$$

В векторной форме:

$$\mathbf{r}\mathbf{N} + D = 0, \quad \mathbf{N} = (A, B, C), \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Перпендикулярный плоскости вектор $\mathbf{N}$ называется *нормалью к плоскости*. Если $|\mathbf{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$, то уравнение плоскости может быть записано в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad p \geqslant 0$$

(*нормальное уравнение плоскости*).

Умножением на нормирующий множитель $\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак которого противоположен знаку D) уравнение (2.103) может быть приведено к нормальному;

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*) В случае, если знаменатель какой-либо из дробей равен 0, то равен 0 и соответствующий числитель.

суть *направляющие косинусы нормали*; p — расстояние от начала координат до плоскости.

Если в уравнении (2.103) $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат. При $A = 0$ ($B = 0$, $C = 0$) плоскость параллельна оси x (оси y, оси z), при $A = B = 0$ ($A = C = 0$, $B = C = 0$) плоскость параллельна плоскости xy (плоскости xz, плоскости yz).

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Эта плоскость пересекает оси координат в точках $P_1 = (a, 0, 0)$, $P_2 = (0, b, 0)$ и $P_3 = (0, 0, c)$.

Плоскость однозначно определяется:

(I) тремя своими точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, не лежащими на одной прямой;

(II) двумя своими точками P_1 и P_2 и параллельным плоскости направлением, задаваемым вектором $\mathbf{R} = (l, m, n)$, не параллельным $\overrightarrow{P_1P_2}$;

(III) точкой P_1 и двумя параллельными плоскости направлениями, задаваемыми двумя линейно независимыми векторами $\mathbf{R}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R}_2 = (l_2, m_2, n_2)$;

(IV) точкой и ненулевым вектором $\mathbf{N} = (A, B, C)$, коллинеарным вектору нормали к плоскости.

Тогда уравнения плоскости получаются следующим образом:

Случай (I): $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$ (смешанное произведение векторов),

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ — радиусы-векторы трех точек P_1, P_2, P_3, а $\mathbf{r} = (x; y; z)$.

Случай (II): $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{R} = 0$.

Случай (III): $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0$.

Случай (IV): $$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0$.

Множеством решений системы, состоящей из уравнений нескольких плоскостей, является *точка* или *линия пересечения* этих плоскостей (прямая). Если система уравнений не имеет решений, то плоскости не имеют общих точек.

Угол пересечения φ двух плоскостей равен углу между векторами нормалей $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ к соответствующим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|}.$$

Угол пересечения ψ между плоскостью и прямой: $\psi = 90° - \chi$ (χ — угол между вектором нормали $\mathbf{N}$ к плоскости и направляющим вектором $\mathbf{R}$ прямой):

$$\cos\chi = \sin\psi = \frac{|\mathbf{NR}|}{|\mathbf{N}||\mathbf{R}|}.$$

2.6.6.2.3. Поверхности 2-го порядка. *Поверхностями 2-го порядка* в пространстве называются такие множества точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0; \quad (2.104)$$

в матричной форме:

$$\mathbf{r}A\mathbf{r}^T + 2\mathbf{a}\mathbf{r}^T + a_{44} = 0,$$

где

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (a_{14}, a_{24}, a_{34}) \quad (A \neq O).$$

Приведение к каноническому виду. При параллельном переносе системы координат на вектор $\mathbf{r}^*$, координаты которого удовлетворяют уравнению $A\mathbf{r}^* = -\mathbf{a}$, в уравнении поверхности 2-го порядка исчезают линейные члены. Уравнение принимает вид

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z' + b_{44} = 0, \quad (2.105)$$

где x', y', z' — координаты относительно новой системы координат Σ'.

В матричной форме: $\mathbf{r}'B\mathbf{r}'^T + b_{44} = 0$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, $B = \| b_{ij} \|$. (Начало новой системы координат P является центром симметрии поверхности 2-го порядка, т. е. если $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ — точка поверхности, то $-\mathbf{r}' = (-x', -y', -z')$ — также точка поверхности 2-го порядка.) Матрицы A и B — симметрические ($a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$), поэтому их собственные значения действительны, а собственные векторы ортогональны.

При последующем преобразовании (преобразование к главным осям) к системе координат Σ'' с началом координат, остающимся в точке P, и осями координат, совпадающими по направлению с собственными векторами, уравнение поверхности 2-го порядка приобретает вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + c_{44} = 0, \quad (2.106)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения матрицы B.

В матричной форме:

$$\mathbf{r}''C\mathbf{r}''^T + c_{44} = 0, \quad \mathbf{r}''^T = (x'', y'', z''),$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

где x'', y'' и z'' — координаты точки на поверхности 2-го порядка относительно Σ''. Если собственное значение имеет кратность k, то k линейно независимых собственных векторов следует ортогонализировать при помощи метода Грама-Шмидта (см. 2.4.4.1.5).

Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированные собственные векторы, принадлежащие B, то уравнение (2.106) получается из уравнения (2.105), если положить $\mathbf{r}' = \mathbf{r}''D^T$. Здесь D – матрица, столбцы которой составлены из координат ортонормированных собственных векторов матрицы B (D ортогональна). Уравнение (2.106) называется *каноническим уравнением* поверхности 2-го порядка. Оси координат являются осями симметрии поверхности.

Если система уравнений $A\mathbf{r}^* = -\mathbf{a}$ не имеет решений (не существует центра симметрии), то по крайней мере одно из собственных значений равно нулю. Приведение к каноническому виду производится аналогично случаю ненулевых собственных значений. Необходимо следить лишь за тем, чтобы в случае двукратного собственного значения, равного нулю, собственный вектор был выбран так, чтобы он был ортогонален вектору $\mathbf{a}$ (свободному члену): $\mathbf{a}\mathbf{r}^T = 0$. Этим обеспечивается исчезновение двух линейных членов в уравнении (2.104). После преобразования к главным осям уравнение поверхности 2-го порядка приобретает вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + mz' = 0 \qquad (2.107)$$

(при этом возможно равенство $\lambda_2 = 0$); x', y', z' – координаты относительно системы Σ'.

В дальнейшем предполагается, что поверхности 2-го порядка приведены к каноническому виду (формулы (2.106) и (2.107)). Тогда возможна следующая классификация (условие $\lambda_1 > 0$ всегда может быть выполнено путем замены переменных или умножением уравнения на -1).

Канонический вид: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$.

λ_2	λ_3	d	Поверхность
>0	>0	<0	эллипсоид
>0	>0	>0	мнимый эллипсоид
>0	>0	0	вырожденный эллипсоид – мнимый конус с действительной вершиной
>0	<0	<0	однополостный гиперболоид
>0	<0	>0	двуполостный гиперболоид
>0	<0	0	эллиптический конус (ось конуса – ось z)
>0	0	>0	цилиндр с мнимыми образующими
>0	0	<0	эллиптический цилиндр
>0	0	0	пара мнимых пересекающихся плоскостей
<0	0	≠0	гиперболический цилиндр
<0	0	0	пара пересекающихся плоскостей, параллельных оси z
0	0	<0	пара параллельных плоскостей, перпендикулярных оси x
0	0	>0	пара мнимых параллельных плоскостей
0	0	0	координатная плоскость (плоскость Oyz)

Канонический вид: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + mz = 0$.

λ_1	λ_2	m	Поверхность
>0	>0	<0	эллиптический параболоид
>0	<0	<0	гиперболический параболоид («седло»)
>0	0	≠0	параболический цилиндр

Некоторые свойства поверхностей 2-го порядка (заданы в каноническом виде).

Поверхности 2-го порядка с центром симметрии.

Эллипсоид (рис. 2.104): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, где a, b и c – полуоси.

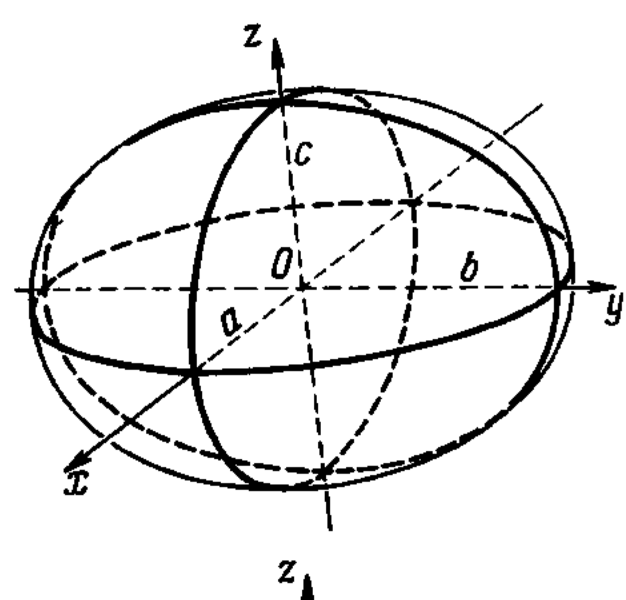


Рис. 2.104

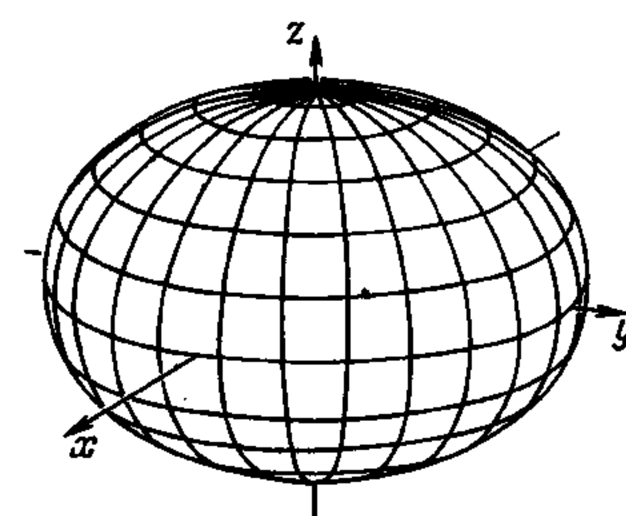


Рис. 2.105

Если $a = b > c$, то имеем сплющенный эллипсоид вращения, получающийся при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, лежащего в плоскости Oxz, вокруг его малой оси (рис. 2.105). При $a = b < c$ имеем вытянутый эллипсоид вращения,

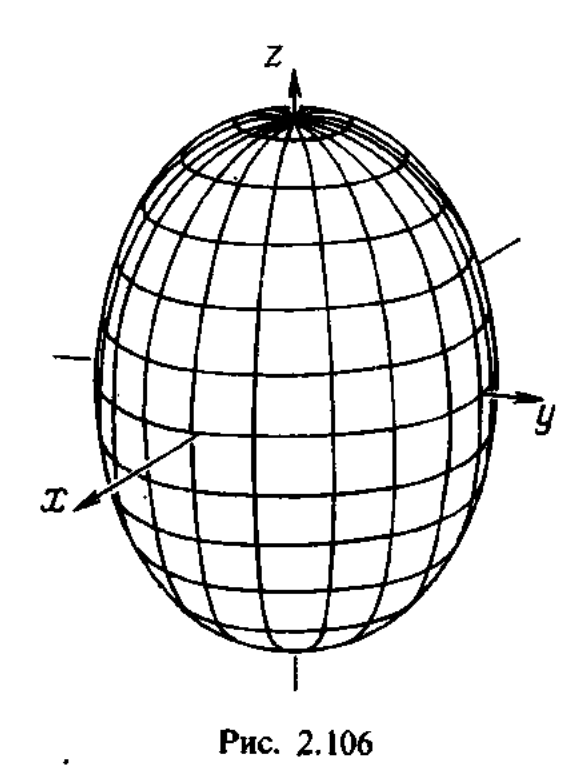


Рис. 2.106

который получается при вращении лежащего в плоскости Oxz эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг его большой оси (рис. 2.106). При $a=b=c$ имеем сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Сечение эллипсоида любой плоскостью есть эллипс (в частном случае – круг). Объем эллипсоида равен $\frac{4}{3}\pi abc$, объем сферы равен $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Однополостный гиперболоид (рис. 2.107):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

a и b – действительные полуоси, c – мнимая полуось. (О прямолинейных образующих см. в конце раздела.)

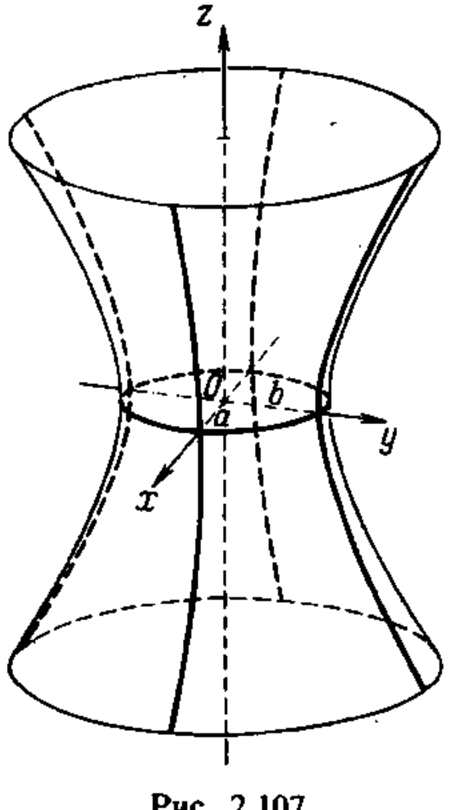


Рис. 2.107

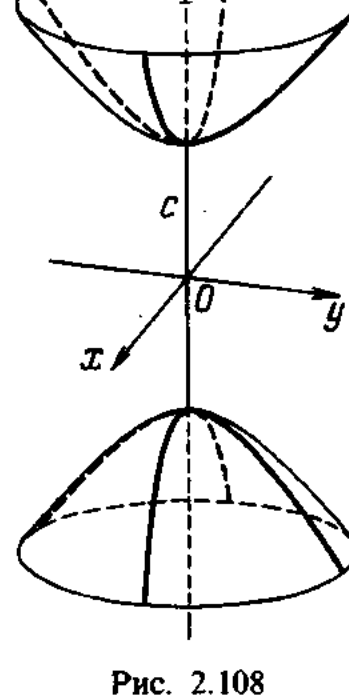


Рис. 2.108

Двуполостный гиперболоид (рис. 2.108):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

c – действительная полуось, a и b – мнимые полуоси.

Для обоих гиперболоидов сечения, параллельные оси z, – гиперболы (для однополостного гиперболоида может быть пара пересекающихся прямых); сечения, параллельные плоскости Oxy, – эллипсы.

Если $a=b$, то гиперболоид может быть получен вращением гиперболы с полуосями a и c вокруг оси z: мнимой – в случае однополостного и действительной – в случае двуполостного гиперболоида.

Конус (рис. 2.109)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

имеет вершину в начале координат; за его направляющую кривую может быть взят эллипс с полуосями a и b, плоскость которого перпендикулярна оси z и находится на расстоянии c от начала координат. Этот конус является асимптотическим для обоих гиперболоидов

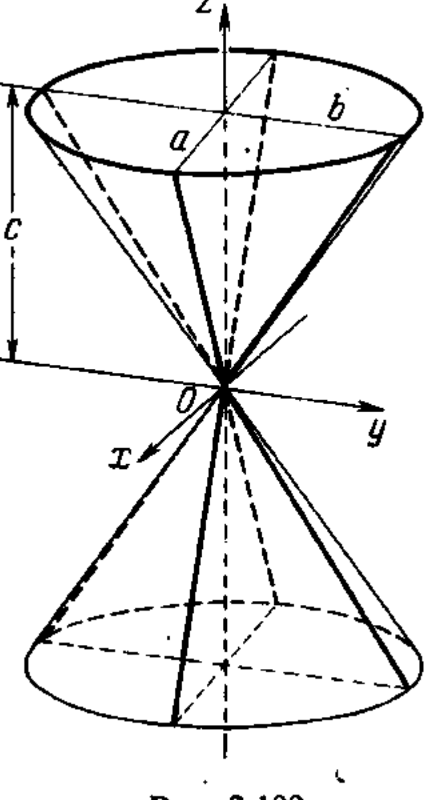


Рис. 2.109

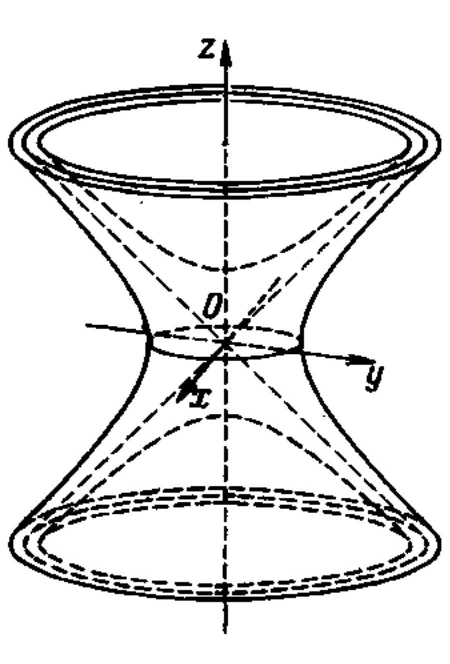


Рис. 2.110

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, т. е. каждая из его образующих при удалении в бесконечность неограниченно приближается к обоим гиперболоидам (рис. 2.110). Если $a=b$, то имеем прямой круговой конус.

Поверхности 2-го порядка, не имеющие центра симметрии.

Эллиптический параболоид (рис. 2.111): $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Сечения, параллельные оси z, – параболы; сечения, параллельные плоскости Oxy, – эллипсы. Если $a=b$, то имеем *параболоид вращения*, получаемый при вращении параболы $z=x^2/a^2$, лежащей в плоскости Oxz, вокруг ее оси.

Объем части параболоида, отсекаемой плоскостью, перпендикулярной его оси, на высоте h, равен $\frac{1}{2}\pi abh$, т. е. равен половине объема эллиптического цилиндра с такими же основанием и высотой.

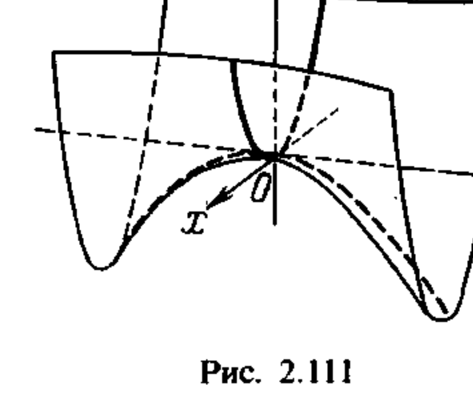


Рис. 2.111

Гиперболический параболоид (рис. 2.112):

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Сечения, параллельные плоскости Oyz, – конгруэнтные (одинаковые) параболы; сечения, параллельные плоскости Oxz, – также конгруэнтные параболы; сечения, па-

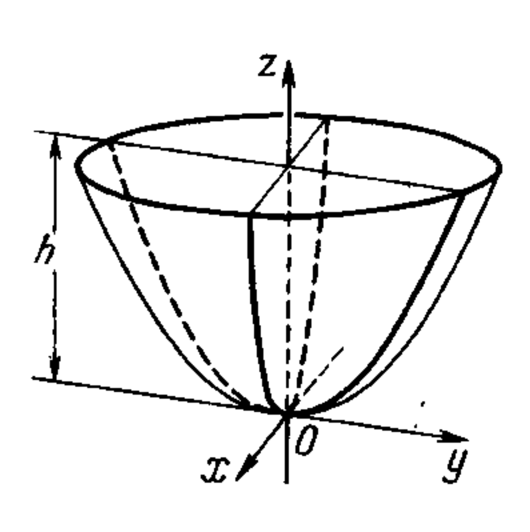


Рис. 2.112

раллельные плоскости Oxy, – гиперболы (а также пары пересекающихся прямых).

Общие свойства. *Прямолинейной образующей* поверхности называется прямая линия, целиком лежащая на данной поверхности; например, прямолинейные образующие конической или цилиндрической поверхности.

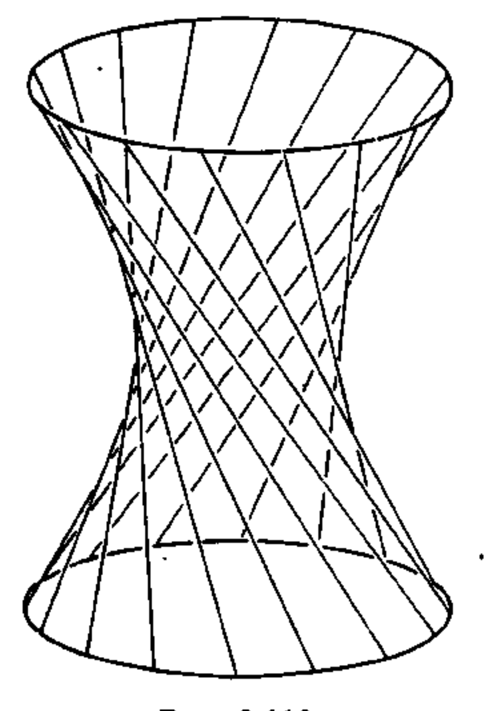


Рис. 2.113

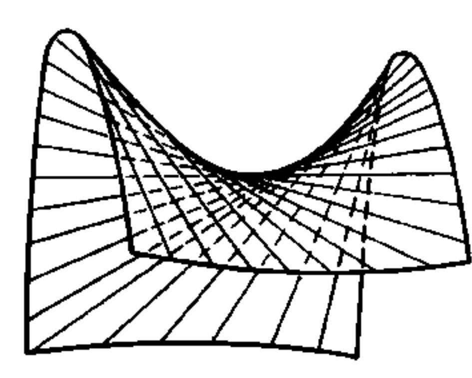


Рис. 2.114

Однополостный гиперболоид (рис. 2.113) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\text{I. } \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b};$$

$$\text{II. } \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b};$$

u и v – произвольные величины.

Гиперболический параболоид (рис. 2.114) $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ также имеет два семейства образующих:

$$\text{I. } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u, \quad u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z;$$

$$\text{II. } \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=v, \quad v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z;$$

здесь u и v – также произвольные величины. Через каждую точку поверхности в обоих случаях проходят две прямые: по одной образующей из каждого семейства (на рис. 2.113 и 2.114 показано лишь по одному семейству прямых).

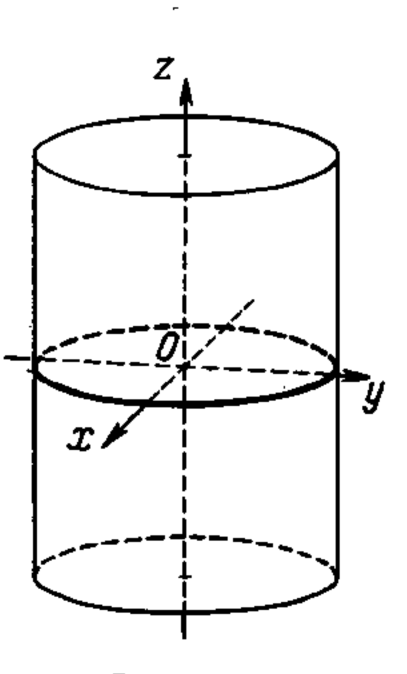


Рис. 2.115

Цилиндры. Форма цилиндра определяется его направляющей. Мы будем считать ее расположенной в плоскости Oxy, а образующие – параллельными оси z. Тогда имеются три цилиндра 2-го порядка:

эллиптический цилиндр (рис. 2.115)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

при $a=b=R$ получаем *прямой круговой цилиндр*

$$x^2+y^2=R^2;$$

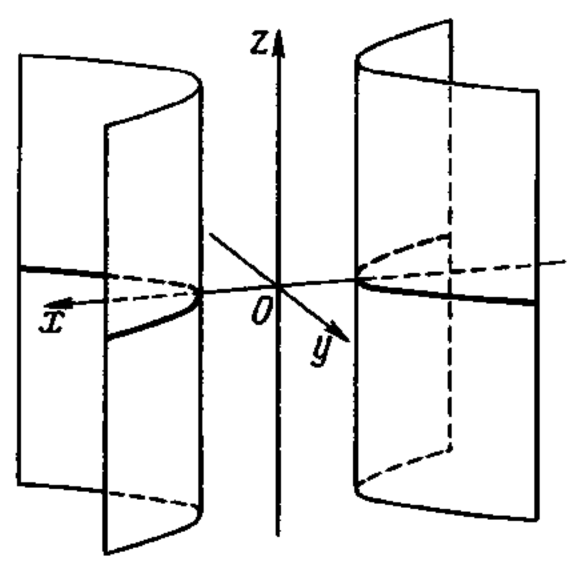


Рис. 2.116

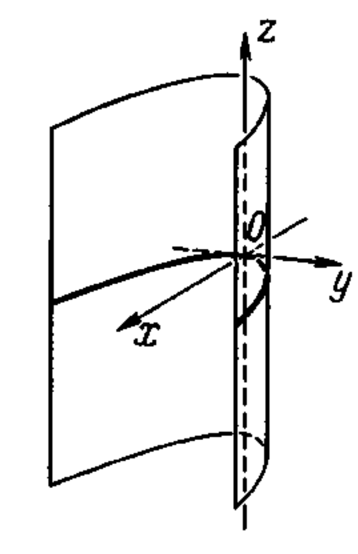


Рис. 2.117

гиперболический цилиндр (рис. 2.116)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

параболический цилиндр (рис. 2.117)

$$y^2=2px.$$

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа, с которыми обычно приходится иметь дело – натуральные, целые (положительные и отрицательные), рациональные и иррациональные, – составляют множество действительных чисел.

3.1.1.1. Система аксиом действительных чисел. Множество **R** действительных чисел может быть охарактеризовано следующими шестнадцатью аксиомами.

Аксиомы сложения.

1. Для любых чисел a, $b\in\mathbf{R}$ определено единственное число $a+b\in\mathbf{R}$, называемое *суммой* чисел a и b.

2. Для любых a, $b\in\mathbf{R}$ имеет место соотношение $a+b=b+a$*) (*коммутативность*).

3. Для любых a, b, $c\in\mathbf{R}$ имеет место соотношение $a+(b+c)=(a+b)+c$ (*ассоциативность*).

4. Существует число $0\in\mathbf{R}$ такое, что $a+0=a$ для всех $a\in\mathbf{R}$. Число 0 носит название *нуль*.

5. Для любого числа $a\in\mathbf{R}$ существует число $b\in\mathbf{R}$ такое, что $a+b=0$.

Аксиомы умножения.

6. Для любых чисел a, $b\in\mathbf{R}$ определено единственное число $a\cdot b\in\mathbf{R}$, называемое *произведением* чисел a и b.

7. Для любых a, $b\in\mathbf{R}$ имеет место соотношение $a\cdot b=b\cdot a$ (*коммутативность*).

8. Для любых a, b, $c\in\mathbf{R}$ имеет место соотношение $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (*ассоциативность*).

9. Существует число $1\in\mathbf{R}$ такое, что $1\cdot a=a$ для всех $a\in\mathbf{R}$. Число 1 носит название *единица*.

10. Для любого $a\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, существует $b\in\mathbf{R}$ такое, что $a\cdot b=1$.

11. Для любых a, b, $c\in\mathbf{R}$ имеем $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (*дистрибутивность*).

Таким образом, множество **R** образует относительно сложения коммутативную группу, а множество **R** без нуля образует коммутативную группу относительно умножения.

Следствия из аксиом сложения и умножения. 1) Для двух действительных чисел a и b имеется ровно одно действительное число x такое, что $a+x=b$. Число x называется *разностью* чисел b и a и обозначается $b-a$. При этом говорят, что b – *уменьшаемое*, a – *вычитаемое* и a *вычитается* из b. В случае $0-a$ пишут $-a$. Таким образом, число b из аксиомы 5 однозначно определено.

2) Для любого $a\in\mathbf{R}$ имеем: $a=-(-a)$, $-0=0$.

3) Для любых a, b, c, $d\in\mathbf{R}$ имеем: $b-a=d-c$ эквивалентно тому, что $a+d=b+c$;

$$(b+d)-(a+c)=(b-a)+(d-c);$$

$$(b+c)-(a+d)=(b-a)-(d-c).$$

4) Из $a\cdot b=0$ следует, что либо $a=0$, либо $b=0$.

5) Для действительных чисел a и b, где $a\neq 0$, существует единственное действительное число x такое, что $a\cdot x=b$. Число x называется *частным* (*дробью*) от деления b на a и обозначается $\frac{b}{a}$ или b/a. При этом b называется *делимым* (*числителем*), а a – *делителем* (*знаменателем*).

6) Для любого $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ имеем $\dfrac{1}{1/a}=a$.

7) Для любых a, b, c, $d\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ равенство $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ эквивалентно тому, что $a\cdot d=b\cdot c$; кроме того,

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{b\cdot d}{a\cdot c},$$

$$\frac{b/a}{d/c}=\frac{b\cdot c}{a\cdot d}.$$

8) Для любых a, $b\in\mathbf{R}$ и любого $c\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ выполняется соотношение

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

9) Для любого $a\in\mathbf{R}$ справедливо равенство $-a=(-1)\cdot a$.

10) Для любых a, $b\in\mathbf{R}$ выполняется равенство $-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$.

11) $(-1)\cdot(-1)=1$.

Множество **R** действительных чисел обладает вследствие указанных свойств алгебраической структурой поля (коммутативного тела).

Кроме того, в **R** вводится отношение порядка («больше», «меньше», «равно»), удовлетворяющее следующим аксиомам.

*) Тождественность двух действительных чисел выражается при помощи знака равенства. Если a и b – различные действительные числа, то пишут $a\neq b$.

Аксиомы порядка.

12. Для двух чисел a, $b \in \mathbf{R}$ имеет место одно (и только одно) из трех соотношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

13. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ таких, что $a < b$ и $b < c$, справедливо соотношение $a < c$ (*транзитивность*).

14. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ таких, что $a < b$, справедливо соотношение $a + c < b + c$.

15. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ таких, что $a < b$ и $c > 0$, справедливо соотношение $a \cdot c < b \cdot c$.

Если $a < b$, то говорят, что a *меньше* b (или b *больше* a); в этом случае пишут также $b > a$. Если или $a < b$, или $a = b$, то пишут $a \leqslant b$. Действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a > 0$, называются *положительными*; действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a < 0$, называются *отрицательными*.

Следствия из аксиом порядка. 1) Если $a < b$, то $-a > -b$. 2) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$. 3) Если $a < b$ и $c < d$, причем $b > 0$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot d$. 4) $1 > 0$. 5) Если $a > 0$, то $1/a > 0$.

16. *Принцип непрерывности Дедекинда.* Пусть множество $\mathbf{R}$ действительных чисел разделено на два класса K_1 и K_2 так, что: а) классы K_1 и K_2 не пусты; б) каждое действительное число относится только к одному классу; в) из условий $a \in K_1$ и $b < a$ следует, что $b \in K_1$.

Тогда существует единственное действительное число s такое, что все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a' < s$, принадлежат классу K_1, а все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a'' > s$, принадлежат классу K_2. Число s называется *сечением* множества действительных чисел.

Множество $\mathbf{R}$ действительных чисел полностью определяется указанными аксиомами 1 – 16.

Геометрическое изображение действительных чисел. Если на прямой g заданием точки O и единичного вектора введена система координат, то каждая точка M прямой g однозначно определяется своей координатой x. Таким образом, каждой точке M прямой g соответствует одно действительное число x, и обратно: каждому действительному числу x соответствует одна точка M прямой g. Прямая g называется *числовой прямой*. Таким образом, точки прямой g и соответствующие им действительные числа могут употребляться равнозначно. При этом говорят: точка a *лежит левее* b (или b *лежит правее* a) в случае, если $a < b$. В частности, отрицательные числа лежат левее нулевой точки O, а положительные числа – правее точки O.

3.1.1.2. Натуральные, целые и рациональные числа. К понятию натуральных чисел приходят в процессе счета. Натуральные числа получаются путем последовательного прибавления 1, начиная с 1. Множество *натуральных чисел* $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ обладает следующими свойствами:

1. $1 \in \mathbf{N}$.
2. Из $n \in \mathbf{N}$ следует $n + 1 \in \mathbf{N}$.
3. Если $n \in \mathbf{N}$, то $n - 1 \in \mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда $n \neq 1$.
4. Если M – подмножество $\mathbf{N}$ со свойствами: а) $1 \in M$; б) из $n \in M$ следует $n + 1 \in M$, то $M = \mathbf{N}$.

Свойство 4 выражает тот факт, что таким путем последовательного прибавления получаются все натуральные числа. Это свойство называется *аксиомой индукции*. Оно позволяет проводить доказательства по индукции.

Принцип доказательства по методу полной (математической) индукции. Пусть $A(n)$ – зависящее от $n \in \mathbf{N}$ утверждение. Если доказано, что: а) $A(1)$ выполняется; б) при условии, что $A(n)$ справедливо для некоторого n, верно также $A(n+1)$ (шаг индукции), то $A(n)$ справедливо для всех $n \in \mathbf{N}$ *).

Пример. Доказать правильность утверждения $A(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. Очевидно, что $A(1)$ верно. Пусть $A(n)$ верно для некоторого числа $n \in \mathbf{N}$; тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Следовательно, верно также $A(n+1)$. Тогда, согласно аксиоме индукции, утверждение $A(n)$ верно для всех $n \in \mathbf{N}$.

Из принципа непрерывности Дедекинда вытекает

Аксиома Архимеда. Для каждого действительного числа a существует натуральное число n такое, что $a < n$.

Сумма и произведение натуральных чисел суть натуральные числа. Однако если $n \leqslant m$, то $n - m \notin \mathbf{N}$. Следующее определение приводит к такому расширению области натуральных чисел, в котором операция вычитания выполнима неограниченно: действительное число g называется *целым числом*, если существуют такие натуральные числа n и m, что $g = n - m$.

Сумма, разность и произведение целых чисел – всегда целые числа. Множество целых чисел $\mathbf{Z}$ образует коммутативное кольцо. Частное от деления целых чисел не всегда есть целое число.

Действительное число a называется *рациональным*, если существуют такие целые числа g_1 и g_2 ($g_2 \neq 0$), что $a = g_1/g_2$. В противном случае a называется *иррациональным*.

Числа g_1 и g_2 не определены однозначно числом a: числитель и знаменатель дроби могут быть домножены на одно и то же целое число p ($p \neq 0$): $\dfrac{g_1}{g_2} = \dfrac{g_1 p}{g_2 p}$. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbf{Q}$.

Каждое действительное число может быть записано в виде десятичной дроби. При этом рациональным числам и только им соответствуют периодические десятичные дроби. Однако, например, разложение в десятичную дробь действительного числа $\sqrt{2}$, т. е. такого однозначно определенного положительного действительного числа, квадрат которого равен 2, не является периодическим. Таким образом, $\sqrt{2}$ – иррациональное число. Множество рациональных чисел бесконечно и счетно, а множество иррациональных чисел несчетно (см. 3.1.2). Множества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ всюду плотны в $\mathbf{R}$, т. е. в каждом интервале $\{x \mid a < x < b\}$ суще-

---

*) Индукция может начинаться не с 1, а с любого числа $n_0 \in \mathbf{N}$ ($n_0 \geqslant 1$). В этом случае $A(n)$ верно для всех $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0$.

ствуют как рациональные, так и иррациональные числа.

3.1.1.3. Абсолютная величина числа. Число $|a|$, $a \in \mathbf{R}$, удовлетворяющее соотношению

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases}$$

называется *абсолютной величиной* числа a (таким образом, $|a| = \sqrt{a^2}$).

Для любых a, $b \in \mathbf{R}$

1) $|a| \geqslant 0$, $|-a| = |a|$, $a \leqslant |a|$;

2) если $|a| = 0$, то это эквивалентно тому, что $a = 0$;

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;

4) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (*неравенство треугольника*);

5) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

3.1.1.4. Элементарные неравенства. Для действительных чисел a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеют место:

обобщенное неравенство треугольника

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|;$$

неравенство Коши – Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Если $a \in \mathbf{R}$, $a > -1$ и $n \in \mathbf{N}$, то $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (*неравенство Бернулли*).

Если $a \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $n \in \mathbf{N}$, то $(1 + a)^n \leqslant 1 + (2^n - 1)a$.

Если $n \in \mathbf{N}$ и $n \geqslant 6$, то $(n/3)^n < n! < (n/2)^n$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа. Тогда $A_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ называется *средним арифметическим*,

$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_i \neq 0$, – *средним геометрическим*.

$M_n = \dfrac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n}$, $a_i \neq 0$, – *средним гармоническим* чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Если $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$M_n \leqslant G_n \leqslant A_n.$$

3.1.2. ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В $\mathbf{R}^n$

Множество M называется *конечным*, если либо оно пусто, либо найдется натуральное n такое, что M может быть взаимно однозначно отображено на подмножество $N_n \subset \mathbf{N}$: $N_n = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leqslant n\}$ (т. е. может быть занумеровано не более чем n числами). В противном случае M называется *бесконечным*. Бесконечное множество M называется *счетным*, если существует взаимно однозначное отображение множества M на $\mathbf{N}$. Конечное или бесконечное счетное множество M называется *не более чем счетным*. В противном случае M называется *несчетным множеством*.

Примеры. 1) $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Q}$ – бесконечные счетные множества. 2) Множества $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ несчетны.

Множество точек из $\mathbf{R}^n$ называется *точечным множеством*. При $n = 1$, т. е. для случая числовой прямой $\mathbf{R}$, точечные множества называются также *числовыми множествами*.

Примеры. 1) Множество $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ является точечным множеством из $\mathbf{R}^2$ (внутренность единичной окружности)*).

2) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_i| \leqslant 1/2,\ i = 1, 2, 3\}$ – точечное множество из $\mathbf{R}^3$ (куб с ребром, равным 1).

3) $M = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ – числовое множество.

Числовое множество M называется *ограниченным сверху*, если существует $C \in \mathbf{R}$ такое, что $x \leqslant C$ для всех $x \in M$. Число C называется *верхней границей* множества M. При этом говорят, что число C *ограничивает* M *сверху*; M называется *ограниченным снизу*, если существует число $C' \in \mathbf{R}$ такое, что $C' \leqslant x$ для всех $x \in M$. При этом говорят, что C' *ограничивает* M *снизу* (C' – *нижняя граница* M). Множество M называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Число G называется *верхней гранью* (*точной верхней границей*), числового множества M, если G есть верхняя граница и для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое $x' \in M$, что $G - \varepsilon < x'$.

Число g называется *нижней гранью* (*точной нижней границей*) числового множества M, если g есть нижняя граница и для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое $x' \in M$, что $x' < g + \varepsilon$.

Верхняя и нижняя грани числового множества M обозначаются соответственно

$$G = \sup M = \sup_{x \in M} x, \quad g = \inf M = \inf_{x \in M} x.$$

Таким образом, для ограниченного сверху (снизу) множества M число $\sup M$ ($\inf M$) является наименьшим (наибольшим) числом, ограничивающим M сверху (соответственно снизу). Если $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$), то это число называется *максимальным* (*минимальным*) *элементом множества* M и обозначается

$$\max M = \max_{x \in M} x \text{ (соответственно } \min M = \min_{x \in M} x).$$

Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет, и притом только одну, верхнюю (нижнюю) грань.

Примеры. 1) Множество $M = \{x \mid x \in \mathbf{Q},\ 0 \leqslant x < 1\}$ является ограниченным. Всякое число $C \geqslant 1$ ограничивает M сверху. Далее, $\sup M = 1$, $\inf M = \min M = 0$. Множество M не имеет максимального элемента.

2) Множество $\mathbf{N}$ ограничено снизу, но не ограничено сверху.

3) Для множества $M = \{x \mid x = 1 + \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N}\}$ имеем $\sup M = \max M = 3$, $\inf M = 2$. Множество M не имеет минимального элемента.

Пусть a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Тогда множество $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x < b\}$ называют *интервалом*, множество $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$ – *отрезком* (*сегментом*), а множества $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x < b\}$ и $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x \leqslant b\}$ – *полуинтервалами*; для интервалов, полуинтервалов и отрезков часто используется общий термин *промежуток*, a и b – концы промежутка, число $b - a$ – длина промежутка. Рассматриваются также

*) В последующем для геометрической наглядности всегда будет рассматриваться декартова система координат.

неограниченные интервалы:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < a\},$$
$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \leqslant a\}.$$

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $Q(y_1, \ldots, y_n)$ – две точки пространства $\mathbf{R}^n$; тогда число

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

называется *расстоянием* между точками P и Q. В случае $n = 1$ получаем $d(P, Q) = |x_1 - y_1|$.

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть P – точка пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда множество

$$U_\varepsilon(P_0) = \{P \mid d(P, P_0) < \varepsilon\}$$

называется *ε-окрестностью* точки P_0. ε-окрестность точки P_0 состоит, таким образом, из всех внутренних точек n-мерного шара радиуса ε с центром в точке P_0. Иными словами, ε-окрестность P_0 есть множество точек пространства $\mathbf{R}^n$, расстояние которых до точки P_0 меньше ε. В случае $n = 1$ ε-окрестность точки $P(x)$ есть интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Множество $U(P_0) \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *окрестностью* P_0, если оно содержит какую-нибудь ε-окрестность P_0.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно может быть заключено в n-мерный шар конечного радиуса. *Диаметром* множества называется верхняя грань расстояний между его точками.

Точка $Q \in \mathbf{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $M \subseteq \mathbf{R}^n$, если в каждой ε-окрестности точки Q найдется отличная от нее точка из M. Точка множества M, не являющаяся предельной для M, называется *изолированной*.

Если Q – предельная точка множества M, то в каждой ε-окрестности точки Q лежит бесконечно много точек из M. Предельная точка множества M может не принадлежать этому множеству.

Примеры. 1) Конечное множество не имеет предельных точек.

2) Множество $M = \{x \mid x = 1 + (n+1)/n,\ n \in \mathbf{N}\}$ имеет предельную точку $x = 2$.

3) Каждое рациональное число является предельной точкой множества иррациональных чисел.

4) Каждое действительное число является предельной точкой множества рациональных чисел.

5) Каждая точка пространства $\mathbf{R}^n$ – предельная точка этого пространства.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. Любое бесконечное ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ имеет по крайней мере одну предельную точку.

Пусть M – множество из $\mathbf{R}^n$. Множество точек $\mathbf{R}^n$, не принадлежащих M, называется *дополнением* M.

Пусть M' – множество всех предельных точек множества M. M' – называется *производным множеством* множества M. Множество $\overline{M} = M \bigcup M'$ называется *замыканием* M.

Справедливы следующие включения: $(M')' \subseteq M'$, $\overline{M}$. Кроме того, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. $M' \subseteq M$. Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым*, если для каждой точки $P \in M$ существует ε-окрестность $U_\varepsilon(P)$, такая, что $U_\varepsilon(P) \subseteq M$. Пустое множество замкнуто и открыто одновременно.

а) Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

б) Пересечение произвольного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

в) Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

г) Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

д) Объединение произвольного числа открытых множеств есть открытое множество.

Примеры. 1) Любое конечное множество точек замкнуто.

2) Для любого точечного множества его производное множество и его замыкание замкнуты.

3) Множество $\mathbf{Q}$ не открыто и не замкнуто в $\mathbf{R}$.

4) Пространство $\mathbf{R}^n$ является как открытым, так и замкнутым множеством.

5) Множество $M = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ не открыто и не замкнуто в $\mathbf{R}$.

6) Любая ε-окрестность точки $P \in \mathbf{R}^n$ – открытое множество.

7) Промежуток $[a, b] \subset \mathbf{R}$ является замкнутым множеством.

Точка P множества $M \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества M, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(P)$ такая, что $U_\varepsilon(P) \subseteq M$. Точка $P \in \mathbf{R}^n$ называется *внешней точкой* для множества M, если она является внутренней точкой его дополнения. Точка P называется *граничной точкой* множества M, если в любой ε-окрестности точки P есть как точки множества M, так и его дополнения. Множество всех граничных точек множества M называется *границей* M.

Примеры. 1) Все точки множества $M = (0, 1) \subset \mathbf{R}$ внутренние.

2) Каждое иррациональное число есть граничная точка множества $\mathbf{Q}$.

3) Множество $M_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ является множеством всех внешних точек множества $M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Единичная окружность является границей M_1 и M_2.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (образом отрезка при непрерывном отображении), все точки которой принадлежат этому множеству. Множество M называется *связным*, если не существует таких открытых G_1 и G_2, что $M \subset G_1 \bigcup G_2$, $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$, а $M \bigcap G_1$ и $M \bigcap G_2$ одновременно непусты. Линейно связное множество связно.

Если $M \subseteq \mathbf{R}^n$ – открытое связное множество, то любые две точки из M можно соединить ломаной, полностью расположенной в M. В частности, открытое связное множество линейно связно.

Пример. Кольцо $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < a < x_1^2 + x_2^2 < b\} \subset \mathbf{R}^2$ является связным множеством.

Открытое связное точечное множество называется *областью*. Ограниченная область G называется *односвязной областью*, если ее граница – связное множество. В противном случае G называется *многосвязной областью*. Объединение

области G и ее границы называется *замкнутой областью.*

Если область G односвязна, то любая замкнутая кривая без самопересечений, лежащая в G, может быть стянута в точку путем непрерывной деформации внутри области G.

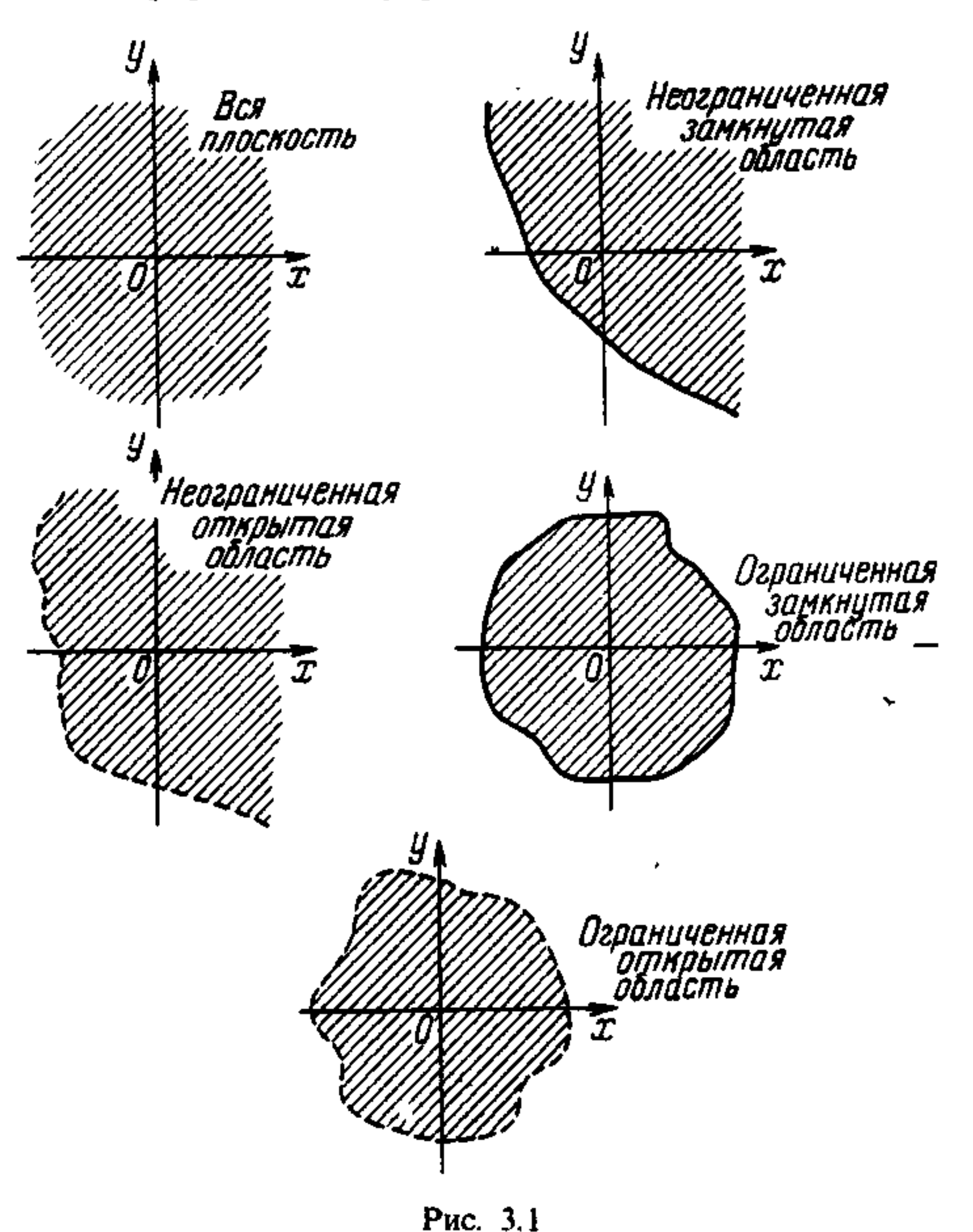


Рис. 3.1

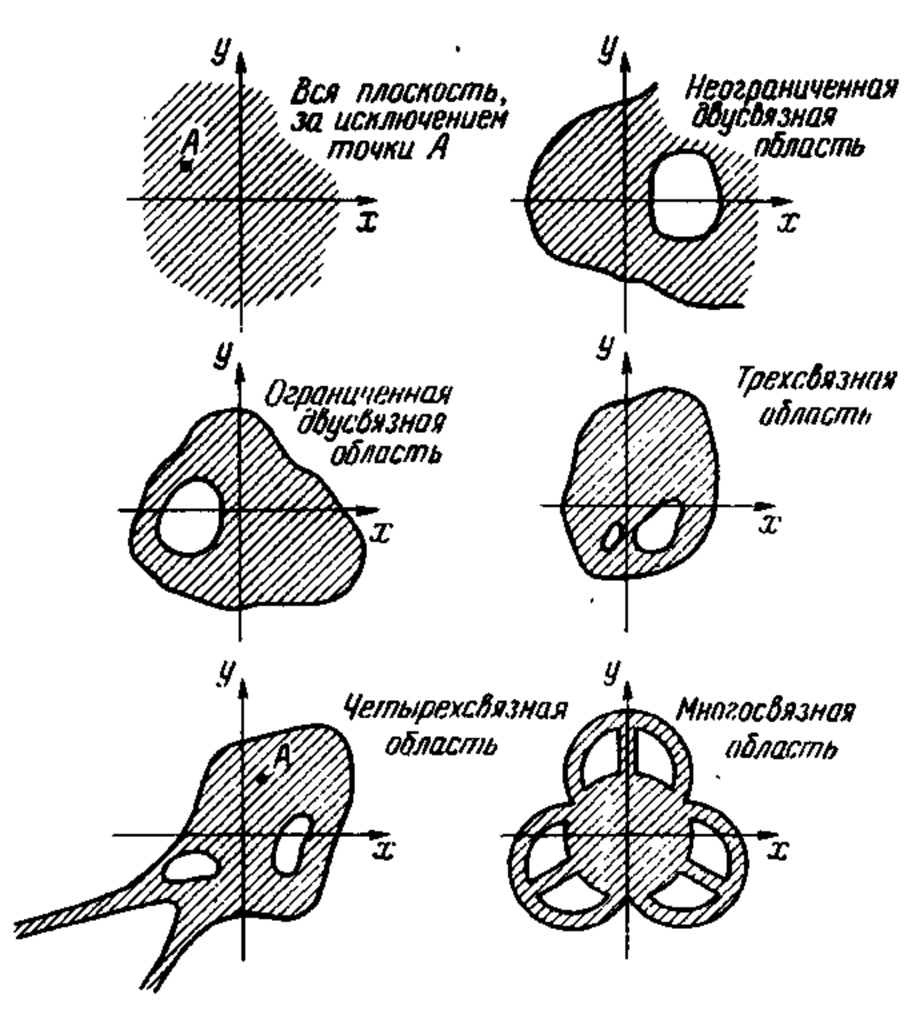


Рис. 3.2

Примеры. 1) Множество $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ односвязно.

2) Кольцо $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < a < x_1^2 + x_2^2 < b\}$ является двусвязной областью.

3) Множество $M = \left\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{(x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\right\}$ не является связным.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $P, Q \in M$ ему принадлежат все точки соединяющего их отрезка.

Пример. Прямоугольник $M = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqslant a, |x_2| \leqslant b\} \subset \mathbf{R}^2$ – выпуклое множество.

Если каждой точке $P \in M$ поставить в соответствие некоторую окрестность $U(P)$, то совокупность этих окрестностей образует *покрытие* множества M. При этом разным точкам может быть сопоставлено одно и то же множество, являющееся их общей окрестностью. Поэтому покрытие множества может состоять и из конечного набора окрестностей.

Лемма Гейне – Бореля о конечном покрытии. **Если $M \subset \mathbf{R}^n$ – замкнутое ограниченное множество, то из любого покрытия множества M открытыми множествами можно выбрать конечное покрытие.**

3.1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1.3.1. Числовые последовательности.

3.1.3.1.1. Ограниченность, сходимость. Примеры. Однозначное отображение множества натуральных чисел во множество действительных чисел $\mathbf{R}$ называется *числовой последовательностью* или, короче, *последовательностью* $\varphi(n) = a_n$; пишут: $\varphi = \{a_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $K \in \mathbf{R}$, что $|a_n| \leqslant K$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N*), что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a**), то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *сходится к пределу a*. При этом пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ или $a_n \to a$. Если последовательность сходится к a, то вне любой ε-окрестности a лежит лишь конечное число членов этой последовательности. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Примеры. 1) Последовательность $\{1/n\}$ сходится к нулю: если задать произвольное $\varepsilon > 0$ и выбрать $N > 1/\varepsilon$, что всегда возможно в силу принципа Архимеда, то для всех $n \geqslant N$ имеет место соотношение $|1/n - 0| = 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon$.

2) Последовательность $\{n\}$ является неограниченной и расходящейся.

3) Последовательность $\{(-1)^n\}$ является ограниченной и расходящейся.

4) Последовательность $\{(n+1)/n\}$ сходится, и $\lim\limits_{n \to \infty} (n+1)/n = 1$.

5) Последовательности $\{(-1)^n/n\}$ и $\{q^n\}$, $|q| < 1$, сходятся к 0.

6) Последовательность $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$ $(n \geqslant 2)$ сходится и имеет пределом $\sqrt{2}$.

7) Для $a > 0$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей (неубывающей)*, если $a_{n+1} \geqslant a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго*

*) Вообще говоря, зависящее от ε.

**) Последовательность может иметь только один предел.

возрастающей, если $a_{n+1} > a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей* (*невозрастающей*), если $a_{n+1} \leqslant a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго убывающей*, если $a_{n+1} < a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными* последовательностями.

3.1.3.1.2. Теоремы о числовых последовательностях. Для числовых последовательностей справедливы следующие теоремы.

1. Любая сходящаяся последовательность ограничена.

2. Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена. Если возрастающая (убывающая) последовательность сходится, то ее предел совпадает с верхней (нижней) гранью множества ее значений.

3. *Критерий сходимости Коши.* Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое*) $N \in \mathbf{N}$, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ имеет место неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

4. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ выполняются соотношения

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

Если, кроме того, $b \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, все $b_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b$.

5. Если $\{a_n\}$ сходится к a, то $\{|a_n|\}$ сходится к $|a|$.

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Тогда, начиная с некоторого номера, все $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

7. Из $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \ldots + a_n)/n = a$.

8. Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, а последовательность $\{b_n\}$ сходится к нулю, то последовательность $\{a_n b_n\}$ также сходится к нулю.

9. Если для членов последовательности $\{a_n\}$ имеет место двойное неравенство $A \leqslant a_n \leqslant B$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $A \leqslant a \leqslant B$.

10. Если все члены последовательности $\{a_n\}$ попарно различны, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ существует тогда и только тогда, когда множество значений $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничено и a является его единственной предельной точкой.

11. Если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то последовательность $\{b_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Пусть $\{a_n\}$ – заданная последовательность, и пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность ($k \in \mathbf{N}$, $n_k \in \mathbf{N}$). Последовательность (a_{n_k}) называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет определенный конечный предел a или ее предел равен ∞*), то такой же предел имеет и любая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ не имеет определенного предела (конечного или бесконечного), то это не означает, что и подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ не имеет предела (конечного или бесконечного). Если подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то его называют *частичным пределом* для последовательности $\{a_n\}$.

Из любой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ всегда можно извлечь такую подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, которая сходилась бы к конечному пределу (теорема Больцано – Вейерштрасса). Если последовательность $\{a_n\}$ не ограничена, то из нее всегда можно выделить подпоследовательность, имеющую частичный предел (например, бесконечный).

Итак, для любой последовательности $\{a_n\}$ независимо от того, ограничена она или нет, существуют частичные пределы (конечные или равные $\pm\infty$). Наибольший и наименьший из этих частичных пределов всегда существуют и обозначаются соответственно

$\overline{\lim}\, a_n$ (*верхний предел* последовательности $\{a_n\}$),

$\underline{\lim}\, a_n$ (*нижний предел* последовательности $\{a_n\}$).

Равенство этих пределов есть условие, необходимое и достаточное для существования предела (конечного или бесконечного) последовательности $\{a_n\}$.

Примеры. 1) Последовательность $\{(1 + 1/n)^n\}$ строго возрастает, ограничена и вследствие этого сходится. Ее предел обозначается буквой e. Число $e = 2{,}71828\ldots$ играет важную роль в качестве основания натуральных логарифмов.

2) Последовательность $\{1/n^2\}$ строго убывает, ограничена и, следовательно, сходится. Ее предел $\inf\{1/n^2 \mid n \in \mathbf{N}\} = 0$.

3) Для чисел $a_1, \ldots, a_r$; $b_1, \ldots, b_s \in \mathbf{R}$ таких, что $a_r \neq 0$, $b_s \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{r} a_{r-i} n^i}{\sum\limits_{k=0}^{s} b_{s-k} n^k} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < s, \\ a_0/b_0 & \text{при } r = s, \\ +\infty & \text{при } r > s \text{ и } a_0/b_0 > 0, \\ -\infty & \text{при } r > s \text{ и } a_0/b_0 < 0. \end{cases}$$

4) Последовательность $\{a_n\}$: $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ ограничена и расходится. Ее подпоследовательность $\left\{1 + \dfrac{1}{2k}\right\}$ сходится к $+1$, а подпоследовательность $\left\{-1 + \dfrac{1}{2k+1}\right\}$ сходится к -1. При этом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ сходится к нулю; следовательно, $\left\{\dfrac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{2^n}\right\}$ также сходится к нулю.

3.1.3.2. Последовательности точек. Однозначное отображение φ множества $\mathbf{N}$ в пространство $\mathbf{R}^n$ называется *последовательностью* точек из $\mathbf{R}^n$:

$$\varphi(k) = P_k(x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbf{R}^n\ **);$$

пишут: $\varphi = \{P_k\}$.

Последовательность точек $\{P_k\}$ называется *ограниченной*, если множество ее значений $\{P_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}^n$ ограничено. Точка $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$

*) Вообще говоря, зависящее от ε.

*) То есть для любого $E > 0$ существует такое $N \in \mathbf{N}$, что $|a_n| > E$ для всех $n > N$. Аналогично определяются пределы $+\infty$ и $-\infty$.

**) Далее координаты точек опускаются ради простоты записи.

называется *пределом* последовательности $\{P_k\}$, если $\lim_{k\to\infty} d(P_k, P_0) = 0$, т. е. если расстояния от точек P_k до P_0 образуют сходящуюся к нулю числовую последовательность. Если последовательность $\{P_k\}$ имеет пределом P_0, то говорят, что она *сходится к пределу* P_0. При этом пишут: $\lim_{k\to\infty} P_k = P_0$*).

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Если последовательность сходится к P_0, то вне любой ε-окрестности точки P_0 лежит лишь конечное число членов данной последовательности.

Последовательность точек $\{P_k(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$ сходится к $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ тогда и только тогда, когда сходятся последовательности соответствующих координат, т. е. когда $\lim_{k\to\infty} x_s^k = x_s^0$ для $s = 1, 2, \ldots, n$.

Примеры. 1) Последовательность точек $\{P_k\}$ из $\mathbf{R}^2$: $(x_1^k, x_2^k) = ((k+1)/k, 1/k)$ ограничена и сходится к точке $P_0(1, 0)$, так как $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

2) Последовательность $\{P_k\}$ точек из $\mathbf{R}^2$: $(x_1^k, x_2^k) = (1/k^2, k^3 - 1)$ не ограничена и расходится, поскольку $\lim_{k\to\infty} (k^3 - 1) = +\infty$.

Так как сходимость последовательностей точек из $\mathbf{R}^n$ может быть сведена к сходимости числовых последовательностей, то большинство теорем о числовых последовательностях переносится на последовательности точек. В частности:

1. Всякая сходящаяся последовательность точек ограничена.

2. *Критерий сходимости Коши*: последовательность точек $\{P_k\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbf{N}$, что для любых $k, l \geqslant N$ справедливо неравенство $d(P_k, P_l) < \varepsilon$**).

3.1.4. ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1.4.1. Функции одного действительного переменного.

3.1.4.1.1. Определение, графическое изображение, ограниченность. Пусть A и B — множества в $\mathbf{R}$. Однозначное отображение f множества A в B называется *действительной функцией одного действительного переменного****)* (см. также 4.1.4.5). Множество A называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Элемент $y \in W(f)$, который ставится в соответствие элементу $x \in D(f)$, обозначается $f(x)$ и называется *значением функции f в точке x*. Множество $\{f(x) \mid x \in D(f)\} \subset B$ называется *множеством значений* f и обозначается $W(f)$.

Функция f полностью определена, если известна область ее определения и для каждого значения $x \in D(f)$ известно значение функции $f(x)$, т. е. известно правило, по которому находится это значение. Правило установления соответствия $x \to f(x)$ часто может быть выражено в форме аналитической зависимости.

Следует различать обозначения f и $f(x)$. Символом f обозначают функцию, в то время как $f(x)$ есть значение функции f в точке $x \in D(f)$. Однако простоты ради используют выражение «функция $f(x)$», понимая под этим функцию, определенную посредством отображения $x \to f(x)$ при $x \in D(f)$.

Графическое изображение функции. Пусть x и y — координаты точки P в декартовой системе координат. Множество $\{P(x, f(x)) \mid x \in D(f)\} \subset \mathbf{R}^2$ называется *графиком функции f*. При этом координата x называется *абсциссой* или *аргументом*, координата $y = f(x)$ — *ординатой* или *значением функции*, а уравнение $y = f(x)$ — *функциональной зависимостью*.

Важным вспомогательным средством при построении графика функции или при выяснении ее характерных свойств является построение *таблицы значений* функции, в которой для известных значений аргумента указаны соответствующие значения функции. Графики и таблицы для важнейших элементарных функций приведены в 1.1.1.2 и 2.5.

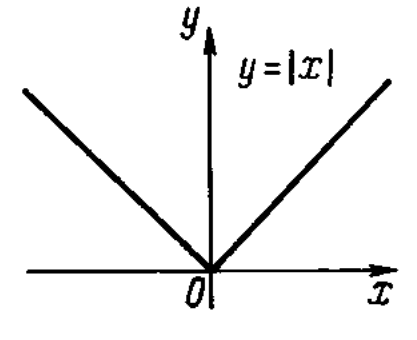


Рис. 3.3

Функция f не обязательно должна быть задана явно — уравнением $y = f(x)$. Она может быть определена также *неявно* — уравнением $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in M \subset \mathbf{R}^2$, *параметрически* $(x = x(t), y = y(t), t \in E \subset \mathbf{R})$ и т. д.

Примеры. 1) Функция $y = f(x) = |x|$, $D(f) = \mathbf{R}$, имеет область значений $W(f) = \{y \mid y \geqslant 0\}$ (рис. 3.3).

2) Всякая последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ является функцией с областью определения $\mathbf{N}$ и областью значений

$$W(f) = \{a_n = f(n) \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

3) Функция f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx+2}{nx+1} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad D(f) = \mathbf{R},$$

имеет область значений $W(f) = \{1, 2\}$.

4) Уравнение $yx - \sin x = 0$ определяет функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ и } D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Сумма, разность, произведение и частное функций f и g определяются следующим образом:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad D(f \pm g) = D(f) \cap D(g);$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \quad D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g);$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap [D(g) \setminus \{x \mid g(x) = 0\}].$$

Если f — взаимно однозначная функция, то обратное к f отображение g также однозначно, т. е. тоже является функцией (см. 4.1.4.4).

Обратное отображение g, соответствующее взаимно однозначному отображению f, такому,

*) Последовательность точек в $\mathbf{R}^n$ может иметь не более одного предела.

**) Это — так называемое *свойство полноты* пространства $\mathbf{R}^n$.

***) Пока речь идет о действительных функциях действительного переменного, мы будем их кратко называть *функциями*.

что $D(f) \subseteq \mathbf{R}$, $W(f) \subseteq \mathbf{R}$, называется *обратной функцией* по отношению к функции f.

Очевидно, что $D(g) = W(f)$, $W(g) = D(f)$, $f[g(x)] = x$ при $x \in D(g)$, $g[f(x)] = x$ при $x \in D(f)$, а функциональная зависимость $y = f(x)$ эквивалентна функциональной зависимости $x = g(y)$.

Для того чтобы из функции $y = f(x)$ получить обратную функцию g, необходимо разрешить уравнение $y = f(x)$ относительно x и (в том случае, если в дальнейшем независимое переменное будет обозначаться посредством x) поменять переменные x и y местами. При этом графиком обратной функции g является график функции f, зеркально отраженный относительно прямой $y = x$.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^2$, $D(f) = W(f) = \{x \mid x \geqslant 0\}$, имеет обратную функцию $g(x) = \sqrt{x}$. На всей области $D(f) = \mathbf{R}$ функция x^2 не имеет обратной.

2) Функцией, обратной к показательной функции $f(x) = e^x$, $D(f) = \mathbf{R}$, является логарифмическая функция $g(x) = \ln x$, $D(g) = \{x \mid x > 0\}$.

3) Функция $f(x) = \sin x$ имеет в $D(f) = [-\pi/2, \pi/2]$ обратную функцию $g(x) = \arcsin x$, $D(g) = [-1, 1]$. На всем множестве $\mathbf{R}$ функция $\sin x$ не имеет обратной.

Если f и g — функции одного переменного, то функция F, определенная соотношением $y = F(x) = g[f(x)]$ на области определения $D(F) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\}$, называется *сложной функцией* или *суперпозицией* (а также *композицией*) функций f и g и обозначается $g \circ f$. Следует иметь в виду, что здесь операция проводится справа налево.

Пример. Если $f(x) = ax + b$, $D(f) = \mathbf{R}$ и $g(x) = \sqrt{x}$, $D(g) = \{x \mid x \geqslant 0\}$, то $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{ax+b}$. Область определения есть $D(g \circ f) = \{x \mid ax + b \geqslant 0\}$.

Функция f называется *ограниченной на множестве* $E \subset D(f)$, если существует такое число A, что $|f(x)| \leqslant A$ для всех $x \in E$. Функция f называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на E, если множество значений f при $x \in E$ ограничено сверху (снизу).

Верхняя (нижняя) грань множества M значений функции f на E называется *верхней* (*нижней*) *гранью функции* f и обозначается $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ $(\inf\limits_{x \in E} f(x))$.

Если число $\sup f$ ($\inf f$) на E принадлежит соответствующему множеству значений M, то оно называется *наибольшим* (*наименьшим*) *значением* f на E и обозначается $\max\limits_{x \in E} f(x)$ $(\min\limits_{x \in E} f(x))$. При этом говорят, что функция f достигает на E своего максимального (минимального) значения.

Примеры. 1) Функции $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ ограничены на $\mathbf{R}$, так как для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$. При этом

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \sin x = \sup_{x \in \mathbf{R}} \cos x = \max_{x \in \mathbf{R}} \sin x = \max_{x \in \mathbf{R}} \cos x = 1.$$

2) Функция $f(x) = x^2$ ограничена на $\mathbf{R}$ снизу, но не ограничена сверху. Однако f ограничена на любом ограниченном подмножестве $E \subset \mathbf{R}$.

Функция $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$, $a_0 \neq 0$, называется *целой рациональной функцией* или *многочленом* n*-й степени*. Многочлен нулевой степени называется *константой*. Функция называется (*дробной*) *рациональной функцией*, если она является частным от деления двух многочленов. Рациональная функция называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе.

Графиком функции, равной константе, является прямая, параллельная оси абсцисс; графиком многочлена первой степени — прямая, пересекающая ось абсцисс под некоторым (не нулевым и не прямым) углом; графиком многочлена второй степени — парабола.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, является правильной рациональной функцией.

3.1.4.1.2. Предел функции одного переменного. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *предел*, равный A, и обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$*), что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Другими словами, f имеет в точке x_0 *предел*, равный A, если для каждой ε-окрестности точки A существует такая δ-окрестность точки x_0, что все точки δ-окрестности, за исключением, быть может, точки x_0, отображаются функцией f в ε-окрестность точки A.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Функция f имеет в точке x_0 предел A тогда и только тогда, когда для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Примеры. 1) Функция $f(x) = x$ имеет в любой точке x_0 предел, равный x_0, так как для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

2) Функция $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$

не имеет предела в 0. Если, например, взять последовательности $x_n = 1/n$ и $x_m = -1/m$, то получим

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{m \to \infty} x_m = 0, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1, \quad \lim_{m \to \infty} f(x_m) = 0.$$

3) Функция $f(x) = 1/x$ не имеет предела в 0. Иначе должна была бы сходиться к конечному пределу последовательность $\{f(1/n)\} = \{n\}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Критерий Коши. Пусть функция f определена в окрестности x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x_1, x_2, удовлетворяющих условию $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Иногда важно знать поведение функции справа (соответственно слева) от точки x_0, так что целесообразно ввести следующее определение.

---

*) δ, вообще говоря, зависит от ε.

Функция f имеет в точке x_0 *предел справа* (*слева*), равный A и обозначаемый $f(x+0)$ $(f(x-0))$,

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = A$$

$$\left(f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A\right),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$ $((x_0-\delta, x_0))$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример. Для функции $f = \begin{cases} 1 \text{ при } x \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} f(x) = 1,$$

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = 0.$$

Функция f имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в точке x_0 существуют пределы этой функции как справа, так и слева, и они равны.

Определение предела может быть обобщено на случай, когда x неограниченно возрастает (соответственно убывает), в предположении, что область определения функции не ограничена. Это позволяет выяснить характер поведения функции «в бесконечности».

Пусть область определения функции не ограничена сверху (снизу); тогда f обладает при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ *пределом*, равным A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое x_1, что для всех $x > x_1$ $(x < x_1)$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = A\right).$$

Пример. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Если взять $x_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, то для всех $x \geqslant x_1$ будем иметь $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x_1} = \varepsilon$.

Наконец, можно определить также понятие «бесконечно большая функция», т. е. функция, значения которой неограниченно возрастают (по абсолютной величине) при приближении аргумента к какой-либо точке, в окрестности которой функция определена. Обзор возможных определений предела дан в табл. 3.1.

Основные теоремы о пределах функций.

Если для одного из пяти случаев: $x \to x_0$, $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$ существуют $\lim f_1(x) = A_1$, $\lim f_2(x) = A_2$, то

а) $\lim (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 A_1 + c_2 A_2$;

б) $\lim f_1(x) f_2(x) = A_1 A_2$;

в) $\lim f_1(x)/f_2(x) = A_1/A_2$, если $A_2 \neq 0$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x = \lim\limits_{x \to 0} x \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

3.1.4.1.3. Вычисление пределов. Для вычисления пределов функций пользуются указанными выше определениями и теоремами, а также следующими приемами.

I. Определение предела посредством преобразования функциональной зависимости к удобному виду.

Примеры. 1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots$

$\ldots + x + 1) = n$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

II. *Правило Лопиталя*. Если при $x \to x_0$ (соответственно $x \to \pm\infty$) в функции $F(x)$ возникают неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то для вычисления $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ (соответственно $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F(x)$) можно зачастую успешно применять следующие правила.

IIа) Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Пусть, далее, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$. Если при этом

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Таблица 3.1

	Обозначение	Определение
Предел функции f в точке $x = x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$	Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
«Обращение функции f в бесконечность» в точке $x = x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} = +\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$

Продолжение

	Обозначение	Определение
Предел функции f при $x \to + \infty$, соответственно $x \to - \infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
«Обращение функции f в бесконечность» при $x \to +\infty$, соответственно $x \to -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$
Пределы справа и слева	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
«Обращение функции f в бесконечность» справа и слева в точке	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$

Соответствующее утверждение имеет место и в том случае, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, а также при $x \to x_0 \pm 0$.

IIб) Пусть функции f и g дифференцируемы при $x > a$ $(a > 0)$ и, кроме того, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, а также $g'(x) \neq 0$ при $x > a$.

Тогда, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Аналогичное утверждение справедливо при $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$, а также при $x \to -\infty$.

Примеры. 1) Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$. Из $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$, согласно IIа), следует, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1 + x} = 1$.

4) $\lim\limits_{x \to +0} (x \ln x) = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} =$
$= \lim\limits_{x \to +0} (-x) = 0$.

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{x^{-1}} =$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1 + x^2)^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(-1)}{1 + x^{-2}} =$
$= \frac{(-1)}{1 + \lim\limits_{x \to +\infty} x^{-2}} = -1$.

6) $\lim\limits_{x \to \pi/2} ((\pi - 2x) \operatorname{tg} x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\pi - 2x}{\operatorname{ctg} x} =$
$= \lim\limits_{x \to \pi/2} ((-2)(-\sin^2 x)) = 2$.

III. Если f непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = x_0$, то (см. 3.1.4.1.4) $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(x_0)$.

Примеры. 1) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\ln(1 + x)/x} =$
$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x)/x} = e^1 = e$.

2) $\lim\limits_{x \to +0} x^x = \lim\limits_{x \to +0} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

IV. Использование разложения функции в ряд Тейлора.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

3.1.4.1.4. Непрерывные функции одного переменного. Функция f называется *непрерывной* в точке $x_0 \in D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, принадлежащих $D(f)$ и таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Примеры. 1) Функция $f(x) = C$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{R}$. Если взять произвольное $\varepsilon > 0$, то для любого положительного δ и всех x, таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - f(x_0)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$.

2) Функция $f(x) = x$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{R}$. Если положить $\delta = \varepsilon$, причем $\varepsilon > 0$ – произвольное число, то для всех x, таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Между непрерывностью функции f в точке x_0 и существованием предела f в x_0 имеется следующая связь:

функция f, определенная в некоторой окрестности x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует предел функции f в точке x_0, равный $f(x_0)$, т. е. когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция f непрерывна в точке $x_0 \in D(f)$ тогда и только тогда, когда для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n \in D(f)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Примеры. 1) Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

2) Функция $f(x) = 1/x$ не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

3) Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $E \subset D(f)$, если f непрерывна в каждой точке $x_0 \in E$.

Если f не является непрерывной в точке x_0 (*разрывна* или имеет *разрыв в точке* x_0), то x_0 называется *точкой разрыва функции* f.

Грубо говоря, непрерывность функции f означает, что в результате небольшого изменения значения аргумента значение функции также изменяется мало. Если $D(f)$ – промежуток и график функции f на $E \subset D(f)$ является куском «сплошной», непрерывной кривой, то f непрерывна на E.

Основные свойства непрерывных функций.

Сумма, разность и произведение непрерывных функций также являются непрерывными функциями.

Если f непрерывна и не равна нулю в точке x_0, то $1/f$ также является непрерывной в точке x_0.

Многочлен непрерывен во всех точках множества $\mathbf{R}$.

Дробно-рациональная функция непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель отличен от нуля.

Пример. Функция $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^3 - 1}$ непрерывна на множестве $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Пусть функция f непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0. Тогда существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U(x_0) \cap D(f)$ имеет место неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Любая функция, представимая в виде суммы степенного ряда, непрерывна в точках, лежащих внутри интервала сходимости этого ряда.

Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g – в точке $f(x_0)$, то сложная функция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.

Пример. Из непрерывности функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = e^x$ в $\mathbf{R}$ следует непрерывность сложной функции $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = e^{\sin x}$ в $\mathbf{R}$.

Аналогично понятию одностороннего предела вводится понятие непрерывности справа и слева.

Функция f называется *непрерывной справа* (*слева*) в точке $x_0 \in D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ сущест-

вует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x - x_0 < \delta$ $(0 \leqslant x_0 - x < \delta)$, имеет место неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция f непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 как справа, так и слева.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0 = 0$ справа, но не является непрерывной слева.

3.1.4.1.5. Точки разрыва и порядок величины функций.

1. *Устранимый разрыв.* Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и не является непрерывной в этой точке. Функция f имеет в точке x_0 *устранимый разрыв*, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

При этом функция

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in D(f) \setminus \{x_0\}, \\ A & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет устранимый разрыв в точке x_0. Функция $f^*(x) = 1$, $D(f^*) = \mathbf{R}$, непрерывна в точке $x_0 = 0$.

2. *Конечный разрыв* (*скачок функции*). Пусть для функции f существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$, причем $A \neq B$. Тогда говорят, что функция f имеет в точке разрыва x_0 *скачок*, равный по величине $|B - A|$.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

имеет в точке 0 скачок, равный 1.

3. *Бесконечный разрыв.* Если для функции f имеет место соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$, то точку x_0 называют точкой *бесконечного разрыва* функции f.

Пример. Функция $f(x) = 1/x$ имеет бесконечный разрыв в точке $x_0 = 0$.

Точки устранимого и конечного разрывов называются также *точками разрыва 1-го рода. Точками разрыва 2-го рода* являются точки бесконечного разрыва и те точки, в которых не существует конечного предела либо справа, либо слева.

График функции с точками разрыва 1-го и 2-го рода показан на рис. 3.4. Точки A, D, F, G – точки разрыва 1-го рода (A, F, G – конечного разрыва, D – устранимого); B, C, E – 2-го рода (B, E – бесконечного разрыва).

Рис. 3.4

Пример. Дробно-рациональная функция имеет не более чем конечное число точек бесконечного разрыва.

Функция f называется *кусочно непрерывной* на отрезке $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, если f непрерывна во всех точках $x \in I$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

4. *Порядок величины функций.* Следующие определения дают возможность сравнивать две функции.

Если для функции f, определенной в окрестности точки x_0, имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{|x - x_0|^s} \right| = c,$$

где $c > 0$ и $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, то точка x_0 называется *нулем функции f порядка s* в случае $s > 0$ *и точкой бесконечного разрыва функции f порядка* $(-s)$ (полюсом порядка s) в случае $s < 0$.

Если $\lim\limits_{x \to \infty} |x^s f(x)| = c$, где $c > 0$, $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, то говорят, что функция $f(x)$ является *бесконечно малой порядка* s при $x \to \infty$, если $s > 0$ (соответственно бесконечно большой порядка $(-s)$ при $x \to \infty$, если $s < 0$)*).

Не для всякой функции, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x)| = \infty$, можно указать порядок «обращения в бесконечность». Например, показательная функция растет при $x \to +\infty$ быстрее, чем любая степень x^s.

Примеры. 1) Для функции $\sin x$ точка 0 является нулем порядка 1, так как $\lim\limits_{x \to 0} \left| \dfrac{\sin x}{x} \right| = 1$.

2) Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно большой порядка n при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} |x^{-n} \cdot x^n| = 1$.

Для сравнения порядка величины двух функций f и g употребляются символы o и O (читается: «o малое» и «O большое»). Если для двух функций f и g существует такая функция h, бесконечно малая при $x \to x_0$ (соответственно при $x \to \pm\infty$), что $f = gh$ (в частности, если $\lim(f/g) = 0$), то пишут:

$$f(x) = o(g(x)).$$

Читается: «$f(x)$ есть *o малое от $g(x)$ при $x \to x_0$*» (соответственно «при $x \to \pm\infty$»).

Пример. $\sin x = o(\sqrt[3]{x})$ при $x \to 0$.

Если для двух функций f и g существует такое $M \in \mathbf{R}$, что $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ при $x \to x_0$ (соответственно при $x \to \pm\infty$), то пишут:

$$f(x) = O(g(x)).$$

Читается: «$f(x)$ есть *O большое от $g(x)$ при $x \to x_0$*» (соответственно «при $x \to \pm\infty$»).

Пример. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$.

3.1.4.1.6. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезках. Всякая функция, непрерывная на отрезке $I = [a, b]$**), ограничена на I.

*) При $x \to \pm\infty$ определение аналогично.

**) В концевых точках a и b функция f должна быть односторонне непрерывна.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{e^x \sin \pi x}{\ln x}$, $x>1$, $f(1)=-\pi e$, $D(f)=[1,\ a]$ $(a>1)$, непрерывна на $D(f)$ и, следовательно, ограничена.

Теорема Вейерштрасса. Для каждой функции, непрерывной на $I=[a,\ b]$, существуют $m=\min\limits_{x\in I} f(x)$, $M=\max\limits_{x\in I} f(x)$.

Пример. Функция f из предыдущего примера достигает на $[1,\ a]$ своих верхней и нижней граней.

Теорема Коши о прохождении через нуль. Если f непрерывна на $[a,\ b]$ и $f(a)>0$, $f(b)<0$, то существует точка $x\in[a,\ b]$, в которой f обращается в нуль (аналогичное утверждение имеет место в случае $f(a)<0$, $f(b)>0$).

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{x}{10}-\ln x$ непрерывна на $[1,\ e]$. Из $f(1)>0$, $f(e)<0$ следует существование точки $x_0\in[1,\ e]$, в которой f обращается в нуль.

Теорема о промежуточном значении. Пусть f непрерывна на $[a,b]$, и пусть $m=\min\limits_{x\in I} f(x)<\max\limits_{x\in I} f(x)=M$ и $\alpha\in(m,\ M)$. Тогда существует точка $x_0\in(a,\ b)$, в которой $f(x_0)=\alpha$. Таким образом, $W(f)=[m,\ M]$.

Функция f называется *убывающей* (*возрастающей*) на $[a,\ b]\subseteq D(f)$, если для любых $x_1,\ x_2\in[a,\ b]$ таких, что $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\leqslant f(x_2))$. Функция f называется *строго убывающей* (*строго возрастающей*) на $[a,\ b]$, если для любых $x_1,\ x_2\in[a,\ b]$ таких, что $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$.

Если f является убывающей или возрастающей, то она называется *монотонной* функцией.

Показательная функция $f(x)=e^x$ строго возрастает на каждом замкнутом отрезке $[a,\ b]$, так как для $x_1<x_2$ имеем $e^{x_2-x_1}>1$, откуда следует $e^{x_1}<e^{x_2}$.

Свойства монотонных функций.

1. Возрастающая (убывающая) на $[a,\ b]$ функция f непрерывна на $[a,\ b]$ тогда и только тогда, когда она принимает каждое значение из промежутка $[f(a),\ f(b)]$ $([f(b),\ f(a)])$.

2. Если f монотонна на $[a,\ b]$, то она может иметь на $[a,\ b]$ не более чем счетное множество точек разрыва, и каждая ее точка разрыва – 1-го рода.

3. Пусть f непрерывна и строго возрастает (убывает) на $[a,\ b]$. Тогда на множестве $[f(a),\ f(b)]$ $([f(b),\ f(a)])$ определена непрерывная строго возрастающая (убывающая) функция g, обратная для f.

Пример. Функция $f(x)=e^x$ непрерывна и строго возрастает на любом $[a,\ b]$, $W(f)=\{y\mid y>0\}$.

Обратная для нее функция $g(x)=\ln x$, $D(g)=\{x\mid x>0\}$, также непрерывна и строго возрастает в $D(g)$.

Функция f называется *равномерно непрерывной* на $M\subseteq D(f)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$ *), что для любых $x_1,\ x_2\in M$ таких, что $|x_1-x_2|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Пример. Функция $f(x)=1/x$ непрерывна при $x\in(0,\ 1)$, но не является равномерно непрерывной в интервале $(0,\ 1)$.

*) Число δ не зависит от выбора $x_1,\ x_2$.

Если f равномерно непрерывна на M, то f непрерывна на M. Если множество M ограничено и замкнуто, то верно и обратное: всякая непрерывная на $[a,\ b]$ функция равномерно непрерывна на $[a,\ b]$.

3.1.4.1.7. Специальные виды функций.

1. Периодические функции. Функция f называется *периодической*, если найдется такое $T\neq 0$, что из $x\in D(f)$ следует $x+T\in D(f)$, $x-T\in D(f)$ и $f(x+T)=f(x)$.

Наименьшее положительное T, удовлетворяющее указанным условиям, называется *периодом* функции f.

Пример. Функции $\sin x$ и $\cos x$ – периодические с периодом 2π.

2. Функции ограниченной вариации. Пусть Z – разбиение отрезка $[a,\ b]$ с точками разбиения $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Если f – такая функция, что $[a,\ b]\subset D(f)$, то число $V(f,\ Z)=\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ называется *вариацией* функции f относительно разбиения Z. Если существует конечная верхняя грань $V(f,\ [a,\ b])=\sup\limits_{Z} V(f,\ Z)$ по всем разбиениям отрезка $[a,\ b]$, то она называется *полной вариацией функции f на отрезке* $[a,\ b]$. При этом f называется *функцией ограниченной вариации* *).

Свойства функций ограниченной вариации.

1) Всякая монотонная на $[a,\ b]$ функция является функцией ограниченной вариации.

2) Всякая дифференцируемая на $[a,\ b]$ функция, производная которой ограничена на $[a,\ b]$, является функцией ограниченной вариации.

3) Функция, определенная на $[a,\ b]$, является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух возрастающих функций.

4) Всякая функция ограниченной вариации интегрируема по Риману (см. 3.1.7.1).

Примеры. 1) Если f возрастает на $[a,\ b]$, то $V(f,\ [a,\ b])=f(b)-f(a)$.

2) Функция

$$f(x)=\begin{cases} x\cos(\pi/2x) & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

не является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0,\ 1]$. При разбиении $0<\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{2n-1}<\ldots<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<1$ получаем $V(f,\ Z)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, откуда вследствие расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ следует утверждение.

3. Абсолютно непрерывные функции. Функция f называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a,\ b]\subset D(f)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любой конечной системы содержащихся в $[a,\ b]$ непересекающихся отрезков $I_k=[x_{k-1},\ x_k]$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})<\delta$, выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\right|<\varepsilon.$$

Всякая абсолютно непрерывная на $[a,\ b]$ функция является равномерно непрерывной функцией и функцией ограниченной вариации.

4. Полунепрерывные функции. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*) в x_0, если для любой после-

*) Функции ограниченной вариации могут быть как непрерывными, так и разрывными. С другой стороны, существуют непрерывные функции неограниченной вариации (см. пример 2).

довательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0) \quad (\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(x_0)).$$

Функция f называется *полунепрерывной* в точке x_0, если f полунепрерывна в точке x_0 сверху или снизу.

Пример. Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in M = \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ 0 \text{ при } x \in [0, 1] \setminus M \end{cases}$$

является полунепрерывной сверху при $x_0 \in M$ и полунепрерывной снизу при $x_0 \in [0, 1] \setminus M$. При этом f разрывна в каждой точке своей области определения.

5. Функции, удовлетворяющие условию Липшица. Если для функции f, для которой $[a, b] \subset D(f)$, существует такая постоянная L, что для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$, то говорят, что функция f на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет *условию Липшица с постоянной Липшица*, равной L.

1) Каждая функция, удовлетворяющая на $[a, b]$ условию Липшица, является абсолютно непрерывной функцией.

2) Всякая дифференцируемая на $[a, b]$ функция, производная которой ограничена на $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ не удовлетворяет условию Липшица на $(0, 1]$, так как множество $\{1/\sqrt{x} \mid x \in (0, 1)\}$ не является ограниченным.

3.1.4.2. Функции нескольких действительных переменных.

3.1.4.2.1. Определение, графическое изображение, ограниченность. Определение функции одного действительного переменного (см. 3.1.4.1.1) будет теперь обобщено на функции n действительных переменных. Область определения такой функции — подмножество в $\mathbf{R}^n$. Точку, которой в декартовой системе координат соответствует последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$, обозначают $P(x_1, \ldots, x_n)$ или, кратко, $P(x_i)$.

Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}$. Однозначное отображение f множества A в множество B называется (*действительной*) *функцией n действительных переменных* (см. также 4.1.4.5). Множество A называется *областью определения* f и обозначается $D(f)$. Образ $y \in W(f)$ элемента $(x_1, \ldots, x_n) = (x_i) = P(x_i) \in D(f)$ обозначается $f(x_1, \ldots, x_n)$, или $f(x_i)$, или $f(P)$. Число $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *значением функции в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. Множество $\{f(P) \mid P \in D(f)\} \subset B$ называется *множеством значений* f и обозначается $W(f)$.

Каждой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$ соответствует только одна точка $y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$. Уравнение $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, как и в 3.1.4.1, называется *функциональной зависимостью*. Функция f не обязательно должна быть задана явно — уравнением $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, но может быть, например, задана *неявно* — уравнением вида $F(x_1, \ldots, x_n; y) = 0$.

Пример. Правилом сопоставления $(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, определяется функция с областью определения $D(f) = \mathbf{R}^2$ и множеством значений $W(f) = \{y \mid y \in \mathbf{R}, y \geqslant 0\}$. Уравнением функции f является уравнение $y = x_1^2 + x_2^2$.

Графическое изображение функции двух переменных. Для функций двух переменных x_1, x_2, как и для функций одного переменного, возможно геометрическое представление (в декартовых координатах x_1, x_2, y пространства $\mathbf{R}^3$). Множество точек

$$\{P(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in D(f)\} \subset \mathbf{R}^3$$

называется *графиком* функции f. Таким образом, для построения графика функции f значение функции $f(x_1, x_2)$ откладывается на прямой, проходящей через точку $(x_1, x_2) \in D(f)$, в направлении оси y. Для большинства рассматриваемых на практике функций точки P образуют поверхность в пространстве $\mathbf{R}^3$, которая и является графиком функции f. Вспомогательным средством при построении графика или выявлении основных свойств функции является построение *таблицы значений*, в которой для конкретных точек области определения указаны соответствующие значения функции. Для функции более чем двух переменных аналогичная наглядная геометрическая интерпретация, вообще говоря, уже невозможна.

Линии уровня, поверхности уровня. Если $c \in W(f)$, то точечное множество

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbf{R}^n$$

называется *поверхностью уровня* функции f. Таким образом, на поверхности уровня функция f имеет постоянное значение. В случае $n = 2$ это точечное множество называется *линией уровня*. Линия уровня — это спроектированная на плоскость x_1Ox_2 кривая пересечения графика функции f с плоскостью, параллельной плоскости x_1Ox_2.

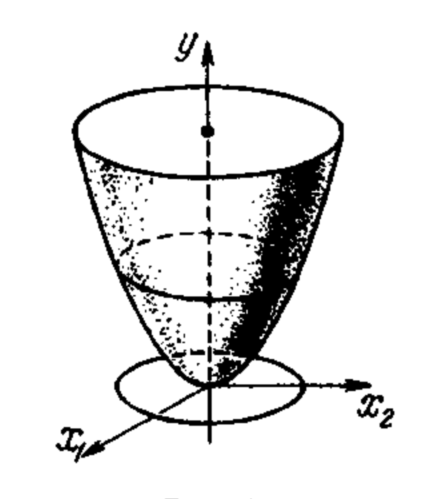


Рис. 3.5

Примеры. 1) Линии уровня функции $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, суть окружности с центром в точке (0, 0). Если пересечь график f плоскостью, содержащей ось y, то полученная кривая пересечения будет параболой. Таким образом, график функции f представляет собой параболоид вращения (рис. 3.5).

2) Линии уровня $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, суть гиперболы (или пара пересекающихся прямых — при $c = 0$). График функции f — гиперболический параболоид.

3) График функции $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, — плоскость, содержащая точку (0, 0). Линии уровня f — прямые.

Функция f, где $D(f) \in \mathbf{R}^n$, называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на $E \subset D(f)$, если множество $\{f(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in E\}$ ограничено сверху (снизу) в $\mathbf{R}$. Функция f называется *ограниченной на* E, если f ограничена на E как сверху, так и снизу.

Пусть функция f ограничена на $E \subset D(f) \subset \mathbf{R}^n$ сверху (снизу). *Верхняя* (*нижняя*) *грань множества* $M = \{f(x_i) \mid (x_i) \in E\}$ значений *функции f на E* обозначается $\sup\limits_{(x_i) \in E} f(x_i)$ $(\inf\limits_{(x_i) \in E} f(x_i))$.

Если $\sup f$ $(\inf f)$ на множестве E принадлежит множеству M, то ее называют *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции f на E* и обозначают через

$$\max_{(x_i) \in E} f(x_i) \quad (\min_{(x_i) \in E} f(x_i)).$$

Примеры. 1) Функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$ ограничена на $D(f)$ снизу, но не является ограниченной сверху.

2) Функция $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, ограничена на $E = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.

Функция f такая, что $D(f) \subset \mathbf{R}^n$, называется *однородной степени* k, если для любого действительного числа $\lambda > 0$ и любого $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ точка $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ лежит в $D(f)$ и имеет место равенство $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема Эйлера. Если однородная функция f с показателем однородности, равным k, дифференцируема, то имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = kf(x_1, \ldots, x_n).$$

Примеры. 1) Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, — однородная степени 2.

2) Функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}$, $D(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, — однородная степени $-1/2$.

3.1.4.2.2. Пределы функций многих переменных. Определения предела из 3.1.4.1.2 теперь обобщаются следующим образом. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_i^0) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$, за исключением, быть может, точки P_0. Функция f имеет в P_0 *предел*, равный A и обозначаемый $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $P(x_i)$, удовлетворяющих условию $0 < d(P, P_0) < \delta$, имеет место неравенство $|f(P) - A| < \varepsilon$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки P_0, за исключением, быть может, самой точки P_0. Функция f имеет в точке P_0 предел, равный A, тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек $\{P_m\}$ такой, что $P_m \in D(f)$, $P_m \neq P_0$ и $\lim_{m \to \infty} P_m = P_0$, имеет место равенство $\lim_{m \to \infty} f(P_m) = A$.

Пусть область определения функции f не ограничена в $\mathbf{R}^n$. Функция f имеет при $P \to \infty$ *предел*, равный A и обозначаемый $\lim_{P \to \infty} f(P) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b > 0$ такое, что для всех $P \in D(f)$, удовлетворяющих условию $d(P, 0) > b$, имеет место неравенство $|f(P) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах из 3.1.4.1.2 легко обобщаются на функции многих переменных.

Примеры. 1) Для всех $P_0(x_1^0, x_2^0) \in \mathbf{R}^2$ справедливо соотношение

$$\lim_{(x_i) \to (x_i^0)} (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2.$$

2) Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^5}{(x_2 - x_1^2)^2 + x_1^6} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

не имеет предела в точке (0, 0): если, например, рассмотреть последовательность $\{1/k, 1/k^2\}$, то получим $\lim_{k \to \infty} \{1/k, 1/k^2\} = (0, 0)$, а $\lim_{k \to \infty} f(1/k, 1/k^2) = +\infty$.

3.1.4.2.3. Непрерывные функции многих переменных. Функция f называется *непрерывной* в точке $P_0 \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $P \in D(f)$, удовлетворяющих условию $d(P, P_0) < \delta$, имеет место неравенство

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если f непрерывна в точке P_0, то для любой ε-окрестности $f(P_0)$ существует такая δ-окрестность $U_\delta(P_0)$ точки P_0, что для всех $P \in U_\delta(P_0)$ значения функции $f(P)$ лежат в ε-окрестности $f(P_0)$.

Пример. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $D(f) = \mathbf{R}^n$, непрерывна во всех точках $P(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$. Если указать произвольное $\varepsilon > 0$ и положить $\delta = \varepsilon/\sqrt{n}$, то для всех $P(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $d(P, P_0) < \delta$, на основании неравенства Коши — Буняковского получим, что

$$|f(P) - f(P_0)| = \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^0| \leq$$

$$\leq \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^0|^2} < \sqrt{n}\,\delta = \varepsilon.$$

Функция f, определенная в окрестности P_0, непрерывна в P_0 тогда и только тогда, когда f имеет в P_0 предел, равный значению функции в этой точке, т. е. когда $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция f, определенная в окрестности точки P_0, непрерывна в P_0 тогда и только тогда, когда для всех последовательностей точек $\{P_i\}$, для которых $P_i \in D(f)$ и $\lim_{i \to \infty} P_i = P_0$, выполняется равенство $\lim_{i \to \infty} f(P_i) = f(P_0)$.

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}$$

имеет разрыв в точке (0, 0), так как последовательность $\{1/k, 1/k\}$ имеет предел $\lim_{k \to \infty} \{1/k, 1/k\} = (0, 0)$, а $\lim_{k \to \infty} f\{1/k, 1/k\} = 1/2 \neq f(0, 0)$.

Из непрерывности функции f следует, что математические операции lim и f можно переставлять: если найти вначале значения функции $f(P_i)$, а затем предел $\lim_{i \to \infty} f(P_i)$, то получим значение функции в точке предела $\lim_{i \to \infty} P_i = P_0$.

Определения и теоремы для непрерывных функций одного переменного (см. 3.1.4.1.4) можно перенести на функции многих переменных.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $E \subset \mathbf{R}^n$, если она непрерывна во всех точках множества E.

Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве* E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $P_1, P_2 \in E$, удовлетворяющих условию $d(P_1, P_2) < \delta$, выполнено неравенство $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$.

Пусть заданы n функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, таких, что $D(\varphi_i) \subset \mathbf{R}^k$, $\bigcap_{i=1}^{n} D(\varphi_i) = D \neq \varnothing$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, и

функция f, такая, что $(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$ для всех $(t_1, \ldots, t_k) \in D$. Отображение F, которое каждому набору k чисел $(t_1, \ldots, t_k) \in D$ ставит в соответствие число $F(t_1, \ldots, t_k) = f[\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)]$, называется *сложной функцией*.

Пример. Пусть $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$, $D(\varphi_1) = D(\varphi_2) = [0, 2\pi)$ и $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$. Тогда $F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $D(F) = [0, 2\pi)$. $F(t)$ является сложной функцией.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных функций являются непрерывными функциями. Частное непрерывных функций – непрерывная функция в точках, в которых знаменатель отличен от нуля.

2) Если f непрерывна в точке P_0 и $f(P_0) > 0$ $(f(P_0) < 0)$, то существует окрестность $U(P_0)$ точки P_0 такая, что для всех $P \in U(P_0) \bigcap D(f)$ выполнено неравенство $f(P) > 0$ $(f(P) < 0)$.

3) Если f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве E, то f ограничена на E.

4) Всякая непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E функция равномерно непрерывна на E.

5) Всякая непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E функция достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

6) *Теорема о промежуточном значении.* Если f непрерывна в области*) E и $f(P_1) = a$, $f(P_2) = b$ для $P_1, P_2 \in E$, причем $a < b$, то для каждого $y \in (a, b)$ найдется точка $P \in E$, в которой $f(P) = y$.

7) Если f непрерывна на $D(f) \subset \mathbf{R}^n$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны на $D(\varphi_i) \subset \mathbf{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$, то сложная функция F, составленная из f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, непрерывна на $D(F)$.

3.1.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1.5.1. Определение и геометрическая интерпретация первой производной. Примеры. Если f – функция одного переменного и $x_0 \in (a, b)$, то функция φ, определенная равенством

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называется *разностным отношением* функции f в точке x_0**).

Геометрическая интерпретация. Пусть на графике функции f в координатной системе x, y заданы фиксированная точка $P_0(x_0, y_0)$ и подвижная точка $P(x, y)$, и пусть секущая, проведенная через эти точки, образует угол β с положительным направлением оси x. Тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Разностное отношение функции f в точке x_0 равно, таким образом, угловому коэффициенту секущей, проведенной через точки P и P_0 (рис. 3.6).

*) Напомним, что область связна.

**) Следует обратить внимание на то, что x_0 – фиксированная точка.

Функция f называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a, b)$, если существует предел разностного отношения функции f в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Этот предел называется *производной* функции f в точке x_0.

$$f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0),\ (df/dx)(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Геометрическая интерпретация. Если на графике функции подвижная точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(x_0, y_0)$ (см. рис. 3.6), то, вообще

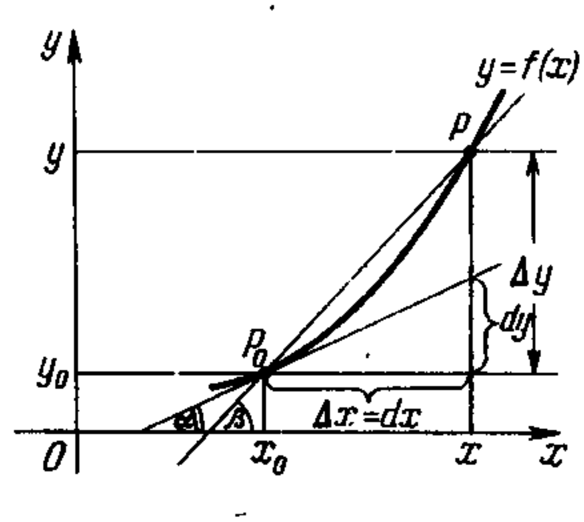


Рис. 3.6

говоря, изменяется также угловой коэффициент секущей. Если существует производная функции f в точке x_0, то прямую, проходящую через точку $P_0(x_0, y_0)$ и такую, что $\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x_0)$, где α – угол наклона этой прямой, называют *касательной к графику* функции f в точке $P_0(x_0, y_0)$. Таким образом, уравнение касательной есть $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Функция f называется *дифференцируемой справа* (*слева*) в точке x_0, если существует предел справа (слева) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \varphi(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \varphi(x)\right)$ разностного отношения φ в точке x_0. Этот предел называется *производной справа* (*слева*) *функции f в точке* x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$, $f'(x_0 + 0)$ $(f'_-(x_0), f'(x_0 - 0))$.

Если существует $f'(x_0)$, то функция f дифференцируема справа и слева в точке x_0 и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Обратно, если существуют односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то существует также $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Функция f называется *дифференцируемой на множестве* E, если она дифференцируема во всех точках $x_0 \in E$*). Функция f называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема на $D(f)$. Если f дифференцируема, то функция f', определенная соответствием $x \to f'(x)$, называется *производной функции f*.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

*) Функция f, дифференцируемая на $E = [a, b]$, должна быть дифференцируема в точках a и b односторонне.

Таблица 3.2

Функция	Производная	Функция	Производная
C (const)	0	$\operatorname{cosec} x$	$-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{crsec} x$
x	1		
x^n	nx^{n-1}		
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\operatorname{arcsec} x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{arccosec} x$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln x$		
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\lg x$	$\dfrac{1}{x}\lg e \approx \dfrac{0{,}4343}{x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Arsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\operatorname{Arch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\operatorname{Arth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\sec x$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\dfrac{1}{1-x^2}$

2) Для функции $f(x) = C$ (C – постоянная) имеем $f'(x_0) = 0$.

3) Показательная функция $f(x) = e^x$ дифференцируема, и $f(x) = f'(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

4) Для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

5) Любой степенной ряд дифференцируем во всех точках, лежащих внутри интервала сходимости.

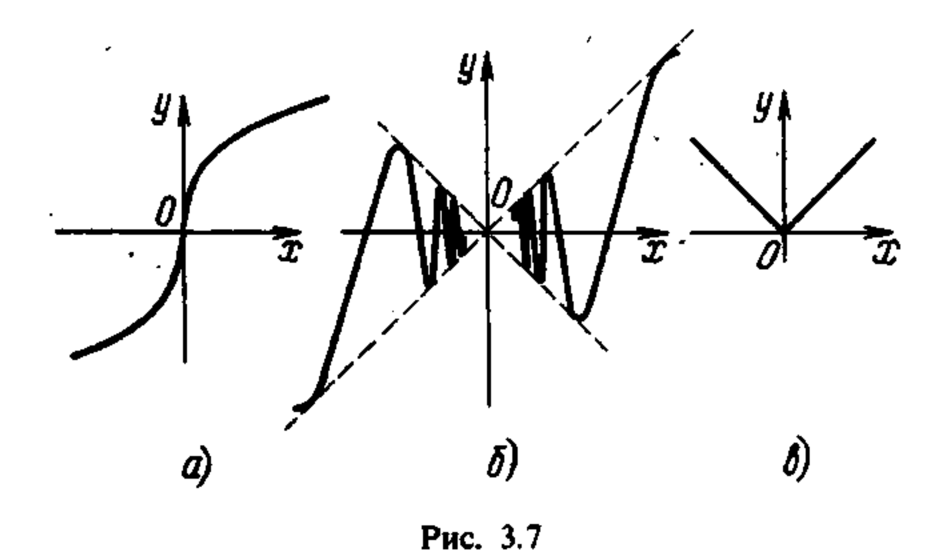


Рис. 3.7

6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$, так как не существует конечного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}.$$

7) Функция

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, так как не существует предела $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$.

8) $f(x) = |x|$ является дифференцируемой справа и слева в точке $x_0 = 0$. Но так как $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$, то f не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Графики функций из примеров 6) – 8) показаны соответственно на рис. 3.7, *а – в*. Они не обладают касательными в точке (0, 0)*).

9) Пусть f дифференцируема и $f(x) > 0$ для всех $x \in D(f)$. Производная функции $\ln f$, т. е. $(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$, называется *логарифмической производной* функции f.

10) Для вычисления производной функции $f(x) = x^x$, $D(f) = \{x \mid x > 0\}$, следует найти вначале логарифмическую производную $(\ln f(x))' = \dfrac{d(x\ln x)}{dx} = \ln x + 1$. Отсюда получается $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

Производные важнейших элементарных функций приведены в табл. 3.2.

3.1.5.2. Производные высших порядков. Пусть производная f' функции f дифференцируема в точке $x_0 \in D(f')$. Тогда $(f'(x))'|_{x=x_0}$ называется *второй производной* функции f в точке x_0.

Обозначение:

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2}{dx^2}f(x_0) = (d^2f/dx^2)(x_0).$$

*) По определению касательная к графику функции не может быть вертикальной.

Действуя подобным образом, определяют *n-ю производную*, или *производную n-го порядка*, функции f в точке x_0:

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'\,|_{x=x_0} = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0).$$

Производные $f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, \ldots$ обозначаются также $f^{\mathrm{III}}, f^{\mathrm{IV}}, f^{\mathrm{V}}, f^{\mathrm{VI}}, \ldots$

Если существует $f^{(n)}(x_0)$, то функция f называется *n раз дифференцируемой в точке* x_0. Имеет место следующее равенство:

$$(f^{(n)}(x))^{(m)}\,|_{x=x_0} = f^{(n+m)}(x_0).$$

Функция f называется *n раз непрерывно дифференцируемой на множестве E*, если она n раз дифференцируема в точке $x \in E$ и $f^{(n)}$ непрерывна на E.

Пример. n-я производная многочлена n-й степени есть постоянная.

Дальнейшие примеры производных высших порядков элементарных функций приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Функция	n-я производная
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ (при целочисленном m и $n>m$ n-я производная равна 0)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k\ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n\sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n\cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ при четном n, $\operatorname{ch} x$ при нечетном n
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$ при четном n, $\operatorname{sh} x$ при нечетном n

3.1.5.3. Свойства дифференцируемых функций.

1. Функция, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке.

2. Пусть функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $c_1f_1 + c_2f_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, также дифференцируема в точке x_0 и

$$(c_1f_1 + c_2f_2)'\,|_{x_0} = c_1f_1'(x_0) + c_2f_2'(x_0).$$

Произведение f_1f_2 также дифференцируемо в точке x_0, и имеет место следующее *правило дифференцирования произведения:*

$$(f_1f_2)'\,|_{x_0} = f_1'(x_0)f_2(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0).$$

В случае, если $f_2(x_0) \neq 0$, частное f_1/f_2 дифференцируемо в точке x_0, и имеет место следующее *правило дифференцирования дроби:*

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'\Bigg|_{x_0} = \frac{f_1'(x_0)f_2(x_0) - f_1(x_0)f_2'(x_0)}{(f_2(x_0))^2}.$$

Примеры. 1) Функция $f(x) = e^x \sin x$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x_0) = e^{x_0}(\sin x_0 + \cos x_0).$$

2) Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ дифференцируема в точках

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{x \mid x = (2k+1)\pi/2,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

и

$$f'(x_0) = \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 x_0 = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

3. Пусть функции f и φ дифференцируемы соответственно в x_0 и t_0, и пусть $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и обладает производной

$$(f(\varphi))'\,|_{t=t_0} = f'[\varphi(t_0)]\cdot\varphi'(t_0).$$

Примеры. 1) Функция $f(x) = e^{\sin x}$ дифференцируема в точках $x_0 \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x_0) = e^{\sin x_0}\cos x_0.$$

2) Показательная функция общего вида $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, и так как $a^x = e^{x\ln a}$, то

$$f'(x_0) = e^{x_0 \ln a}\ln a = a^{x_0}\ln a.$$

4. Пусть функция f дифференцируема и строго монотонна на (a, b). Пусть также в точке $x_0 \in (a, b)$ производная $f'(x_0)$ не равна нулю. Тогда обратная функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, и ее производная есть

$$(g(y))'\,|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Примеры. 1) Показательная функция $f(x) = e^x$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Следовательно, $g(y) = \ln y$ дифференцируема в точке $y_0 = e^{x_0}$. Ее производная есть

$$(g)'\,|_{y=y_0} = (\ln y)'\,|_{y=y_0} = \frac{1}{y_0} = \frac{1}{e^{x_0}}.$$

2) Для $x \in \mathbf{R}$ имеем $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

5. Если функции f_1 и f_2 n раз дифференцируемы в точке x_0, то функция f_1f_2 также n раз дифференцируема в точке x_0, и имеет место *формула Лейбница*:

$$(f_1f_2)^{(n)}\,|_{x_0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(k)}(x_0) f_2^{(n-k)}(x_0),$$

если считать, что $f_i^{(0)}(x_0) = f_i(x_0)$ $(i = 1, 2)$.

Для функций, дифференцируемых в интервале, имеют место следующие теоремы.

Теорема Ролля. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Таким образом, при выполнении предположений этой теоремы график функции f имеет в точке x_0 касательную, параллельную оси x. Из теоремы

Ролля следует, в частности, что между двумя нулями многочлена находится по крайней мере один нуль производной этого многочлена.

Теорема Лагранжа (*о конечном приращении*). Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b), то найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Положив $b - a = k$ и $\theta = (x_0 - a)/k$, получим $f(a + k) = f(a) + f'(a + \theta k)\,k$, причем $\theta \in (0, 1)$.

Геометрическая интерпретация. Если для функции f выполняются условия теоремы Лагранжа, то к графику функции f можно провести по меньшей мере одну касательную, параллельную секущей, проведенной через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Если f дифференцируема на (a, b) и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x) = C = \text{const}$.

Теорема Коши. Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы в (a, b), и пусть $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Пусть функция f дифференцируема $n + 1$ раз в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ $(\alpha > 0)$. Тогда для всех $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ имеет место *формула Тейлора*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + R_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{f^{\nu}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + r_{n+1}(x),$$

где

$$r_{n+1}(x) = o((x - x_0)^{n+1}),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Величина $R_n(x)$ называется *остаточным членом* (*в форме Лагранжа*) формулы Тейлора.

В частном случае, когда $x_0 = 0$, получается *формула Маклорена*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

В случае $n = 0$ формула Тейлора сводится к теореме Лагранжа. Если f бесконечно дифференцируема в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (т. е. имеет в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ производные всех порядков) и для всех $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, то функцию f можно представить в виде суммы *ряда Тейлора*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

для всех $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

При $x_0 = 0$ этот ряд называется также *рядом Маклорена*. Следовательно, если $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ при $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, то функция $f(x)$ может быть аппроксимирована в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ многочленом n-й степени $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$ (см. также 3.1.14.6).

Пример. Показательная функция $f(x) = e^x$ бесконечно дифференцируема в $\mathbf{R}$. Из соотношения $f^{(n)} = f$ для всех $n \in \mathbf{N}$ получается формула Маклорена:

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} + \frac{e^{\theta x}}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

Для каждого $x \in \mathbf{R}$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{e^{\theta x}}{(n + 1)!}x^{n+1} = 0$, и, следовательно, $e^x = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$. В частности, отсюда следует:

$$e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}.$$

3.1.5.4. Монотонность и выпуклость функций. Функция f, дифференцируемая на (a, b), возрастает (убывает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$. Если при этом не существует интервала $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ такого, что $f'(x) = 0$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, то f строго возрастает (убывает).

Таким образом, угол наклона касательной к графику дифференцируемой возрастающей (убывающей) функции является неотрицательным (неположительным).

Если для дифференцируемой функции f: а) $f(x_0) \geqslant 0$, б) для каждого $x \geqslant x_0$ выполняется условие $f'(x) \geqslant 0$, то $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant x_0$.

Примеры. 1) Для функции $f(x) = e^x$ при любом $x \in \mathbf{R}$ имеем $f'(x) = f(x) > 0$. Следовательно, f строго возрастает на $\mathbf{R}$.

2) Функция $f(x) = x - \sin x$ строго возрастает на $I = (0, 2\pi)$, так как для $x \in I$ имеем $f'(x) = 1 - \cos x > 0$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) = x - \sin x > 0$ при $x \in I$, а отсюда и при всех $x > 0$.

3) Функция $f(x) = e^{-x} + x - 1$ строго возрастает на $[0, +\infty)$, так как $f'(x) = -e^{-x} + 1 > 0$ при $x > 0$. Отсюда, так как $f(x) = 0$, следует, что $f(x) > 0$, т. е. $e^{-x} > 1 - x$ при $x > 0$.

Дифференцируемая на (a, b) функция f называется *выпуклой вниз* (соответственно *строго выпуклой вниз*) на (a, b), если $f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ (соответственно

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1))$$

для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 \neq x_2$.

Дифференцируемая на (a, b) функция f называется *выпуклой вверх* (соответственно *строго выпуклой вверх**)), если $f(x_2) \leqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ (соответственно $f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$) для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 \neq x_2$.

*) Часто в литературе используют вместо «выпуклый вниз» термин «вогнутый», а вместо «выпуклый вверх» просто «выпуклый»; такая терминология имеется и в некоторых разделах этого справочника.

Геометрическая интерпретация выпуклости функции. Из неравенств, указанных в определении выпуклости, следует, что график функции f, выпуклой вниз, нигде не лежит под касательной к нему. Если f строго выпукла вниз, то график f, за исключением точки касания, всегда лежит над любой касательной к нему. Соответствующие утверждения имеют место и для случая выпуклости вверх.

Пример. Функция $f(x)=x^2$ строго выпукла вниз в $D(f)=\mathbf{R}$, так как для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_1 \neq x_2$, выполнено неравенство $x_2^2 > x_1^2 + 2x_1(x_2-x_1) = 2x_1x_2 - x_1^2$.

Критерии выпуклости функции.

1. Дифференцируемая на (a, b) функция f выпукла вниз (вверх) на (a, b) тогда и только тогда, когда f' возрастает (убывает) на (a, b). Функция f строго выпукла вниз (вверх) на (a, b) тогда и только тогда, когда f' строго возрастает (убывает) на (a, b).

2. Дважды дифференцируемая в (a, b) функция f выпукла вниз (вверх) на (a, b) тогда и только тогда, когда для всех $x \in (a, b)$ имеет место неравенство $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$.

Примеры. 1) Показательная функция $f(x)=e^x$ строго выпукла вниз на $\mathbf{R}$, так как для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем: $f'(x)=e^x>0$ – строго возрастающая в $\mathbf{R}$ функция.

2) Функция $f(x)=\cos x$ строго выпукла вверх в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, так как для всех $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ имеем $f''(x) = -\cos x < 0$.

3.1.5.5. Экстремумы и точки перегиба. Пусть функция f определена на (a, b), и пусть $x_0 \in (a, b)$. Значение $f(x_i)$ называется *локальным минимумом* (*максимумом*) функции f на (a, b), если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $U(x_0) \subset (a, b)$, и для всех $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ выполнено неравенство

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Максимум или минимум функции f называется (*локальным*) *экстремумом* функции f на (a, b).

Экстремумы функции f на (a, b) являются, таким образом, наибольшими или наименьшими значениями функции относительно некоторой окрестности. Они отличаются, вообще говоря, от наименьшего $m = \min\limits_{x \in (a, b)} f(x)$ и наибольшего $M = \max\limits_{x \in (a, b)} f(x)$ значений функции на всей области определения. Если, однако, f выпукла вниз (вверх) на (a, b) и имеет минимум (максимум) в (a, b), то он совпадает с $m(M)$. Наибольшее (наименьшее) значение функции f, дифференцируемой на $[a, b]$, достигается либо в одной из точек локального максимума (минимума), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Таким образом, если множество локальных максимумов (минимумов) конечно и если известны все локальные максимумы (минимумы) функции f на $[a, b]$ и значения функции в точках a и b, то перебором можно определить $\max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ $(\min\limits_{x \in [a, b]} f(x))$.

Пример. $f(0)=0$ является локальным минимумом функции $f(x)=x^2$ на $[-1, +1]$, который совпадает с наименьшим значением f на $[-1, +1]$.

Необходимое условие существования экстремума. Если $f(x_0)$ является экстремумом дифференцируемой функции f, то $f'(x_0)=0$. Касательная к графику функции f, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси x.

Пример. Так как $f(0)=0$ является минимумом функции $f(x)=x^2$, то $f'(0)=0$.

Достаточные условия существования экстремума.

1. Если f дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$, то функция f имеет в точке x_0 локальный минимум (максимум).

2. Пусть f k раз дифференцируема в точке x_0. Далее, пусть $f^{(\nu)}(x_0)=0$ при $\nu=1, \ldots, k-1$ и $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Если k четное, то f имеет в точке x_0 при $f^{(k)}(x_0)>0$ минимум и при $f^{(k)}(x_0)<0$ максимум. Если k нечетно, то экстремума нет.

Примеры. 1) Функция $f(x)=x^4$ имеет локальный минимум в точке $x_0=0$, который совпадает с абсолютным минимальным значением f в $\mathbf{R}$, так как f в $\mathbf{R}$ четыре раза непрерывно дифференцируема и

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0, \quad f^{(4)}(0)=4!>0.$$

2) Для функции $f(x)=x^3$ в точке $x_0=0$ выполняется необходимое условие экстремума $f'(0)=0$. Однако $f(0)=0$ не является точкой экстремума функции f.

3) Функция $f(x)=x^3+x^2-x-1$ имеет минимум в точке $x_0=1/3$ и максимум в точке $x_2=-1$. Однако, поскольку $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, у функции f в $\mathbf{R}$ нет наибольшего и наименьшего значений.

4) Пусть среди прямоугольников с одинаковым периметром необходимо найти максимальный по площади. Если a, b – длины сторон прямоугольника, то его площадь равна $S=a \cdot b$. Из условия $P=2(a+b)=\text{const}>0$ следует, что $b=P/2-a$ и $S(a)=a(P/2-a)$. Решение задачи сводится, таким образом, к нахождению максимального значения функции S, где $D(S)=[0, P/2]$. Уравнение $S'(a)=-2a+P/2=0$ имеет единственное решение $a_0=P/4$. Так как $S''(a_0)=-2<0$, то S имеет в точке $a_0=P/4$ локальный максимум, который вследствие того, что $S(0)=S(P/2)=0$, совпадает с максимальным значением S. Искомый прямоугольник есть квадрат со стороной $a=P/4$.

5) Пусть заданы n значений измеримой величины $a_1, \ldots, a_n$. Число x (среднее значение) должно быть определено так, чтобы сумма квадратов отклонений величин a_k от x принимала минимальное значение, т. е. надо определить минимум функции

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-x)^2, \quad D(f)=\mathbf{R}.$$

Уравнение $f'(x)=-2\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-x)=0$ имеет единственное решение $x_0=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. Из того, что $f''(x_0)=2n>0$, следует, что f имеет в точке x_0 локальный минимум, который совпадает с минимальным значением f в $\mathbf{R}$. Искомое среднее значение равно среднему арифметическому значений измеряемой величины.

Предположения о дифференцируемости функции f в необходимых (соответственно достаточных) условиях экстремума могут не выполняться, но тем не менее функция f может иметь экстремумы. Например, функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке $x_0=0$, однако имеет в ней минимум. В подобных случаях нужно пытаться найти значения экстремумов непосредственно на основе определения. При этом важным вспомогательным средством являются соображения о монотонности вблизи исследуемых точек. Функция $f(x)=|x|$, например, является строго убывающей при $x<0$ и строго возрастающей при $x>0$. Следовательно, $f(0)=0$ является ее минимумом.

Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Функция f имеет в точке

x_0 *точку перегиба* тогда и только тогда, когда функция f' имеет в точке x_0 локальный экстремум.

Геометрическая интерпретация. Если f имеет в точке x_0 точку перегиба, то график функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ «перегибается» через касательную к нему в этой точке, т. е. в некоторой окрестности точки x_0 кривая при $x < x_0$ и при $x > x_0$ лежит по разные стороны от касательной.

Необходимое условие существования точки перегиба. Если функция f, дважды дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0, имеет в x_0 точку перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие существования точки перегиба. Если f в некоторой окрестности точки x_0 k раз дифференцируема, причем k нечетно, $k \geqslant 3$, и $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ при $\nu = 2, 3, \ldots, k-1$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то функция f имеет в x_0 точку перегиба.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^3$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку перегиба, так как $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$.

2) $f(x) = \sin x$ имеет в $x_0 = 0$ точку перегиба; $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f'''(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$.

3.1.5.6. Элементарное исследование функции. При помощи дифференциального исчисления во многих случаях можно получить представление о поведении графика функции, не заполняя подробных таблиц значений функции, которые в большинстве своем неудовлетворительно отражают важнейшие качественные свойства функции, такие, как точки разрыва, локальные экстремумы или нули функции. Такое *исследование функции* включает в себя приведенные ниже этапы, которые могут быть проведены на основе методов, описанных в 3.1.4.1, 3.1.5.4 и 3.1.5.5.

1. Определение нулей функции f (решение уравнения $f(x) = 0$), четности (нечетности) и периодичности.

2. Определение интервалов непрерывности и дифференцируемости.

3. Классификация точек разрыва функции f и исследование ее поведения «на бесконечности».

4. Определение локальных экстремумов и точек перегиба.

5. Определение интервалов монотонности и выпуклости.

6. Вычисление соответствующих значений функции.

7. Выполнение эскиза графика функции.

Пример. Будем исследовать график функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{3} & \text{при } x > 2, \\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1} & \text{при } x \leqslant 2. \end{cases}$$

1) Функция f не имеет нулей.

2) f непрерывна на $\mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$. Так как $f'_-(2) = -8/9$, $f'_+(2) = 0$, то f не дифференцируема в точке $x_1 = 2$. Следовательно, функция f дифференцируема на $\mathbf{R} \setminus \{2, 1, -1\}$ (см. 3.1.5.3).

3) При $x \leqslant 2$ $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} + 1$. Точки $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$ являются, таким образом, точками разрыва 2-го рода. Далее,

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5/3, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

4) Единственное решение уравнения $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0$ есть $x_0 = 0$. При $x < 2$ и $x \neq \pm 1$ получим, что $f''(x) = \dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$. Из того, что $f''(0) = -4 < 0$, следует, что f имеет в 0 локальный максимум. Функция f не достигает в области определения наибольшего и наименьшего значений. Так как у уравнения $f''(x) = 0$ нет действительных решений, то f не имеет точек перегиба.

5) При $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (-1, 0)$ $f'(x) > 0$. Следовательно, f строго возрастает в этих интервалах. При $x \in (0, 1)$ и $x \in (1, 2)$ $f'(x) < 0$, откуда следует, что f строго убывает в этих интервалах.

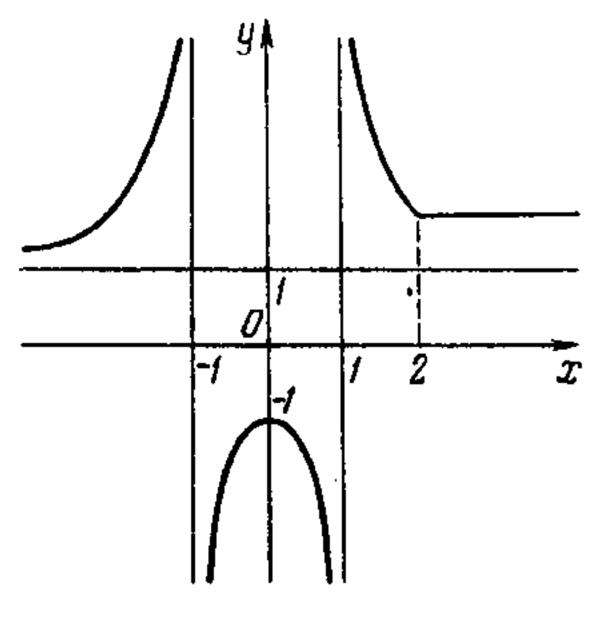


Рис. 3.8

При $x \in (-1, +1)$ $f''(x) < 0$ и, следовательно, f строго выпукла вверх в $(-1, +1)$. При $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (1, 2)$ $f''(x) > 0$. Следовательно, f строго выпукла вниз в этих интервалах (рис. 3.8).

3.1.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1.6.1. Частные производные, геометрическая интерпретация. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$. Функция f называется *дифференцируемой* по x_k, если существует предел разностного отношения

$$\lim_{x_k \to x_k^0} (f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) -$$

$$- f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0))/(x_k - x_k^0);$$

этот предел называется *частной производной функции* f (по x_k) в точке P_0 и обозначается $\dfrac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Частная производная функции f по x_k в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равна, таким образом, обыкновенной производной функции действительного переменного x_k, которая получается из f, если переменные x_i для $i \neq k$ положить равными x_i^0.

Функция f называется *дифференцируемой по каждому из переменных в* $E \subset D(f)$, если для f на E существуют частные производные по каждому из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой* в точке $P_0 \in D(f)$, если f дифференцируема по каждому из переменных в некоторой окрестности точки P_0 и все частные производные $\partial f/\partial x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ непрерывны в P_0.

Пример. Функция $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$ дифференцируема по каждому из переменных в $\mathbf{R}^2$, и

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \sin x_2^0, \quad f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \cos x_2^0;$$

более того, f является непрерывно дифференцируемой в $\mathbf{R}^2$.

При $n > 1$ из дифференцируемости f в точке P_0 по каждому из переменных не следует, вообще говоря, непрерывность f в точке P_0. Функция f из примера 2) в 3.1.4.2.2 разрывна в точке (0, 0), несмотря на то, что f дифференцируема в (0, 0) по x_1 и x_2: $f'_{x_1}(0, 0) = f'_{x_2}(0, 0) = 0$.

Геометрическая интерпретация частной производной. Пусть f — функция двух переменных, дифференцируемая по каждому из переменных в точке $P_0(x_0, y_0)$. Рассмотрим плоскость П, проходящую через точку $P_0(x_0, y_0)$ параллельно плоскости xOz, т. е. плоскость $y = y_0$. По определению $f'_x(x_0, y_0)$ есть число, равное $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол между касательной к кривой пересечения плоскости П и графика (см. 4.1.4.4) функции f и плоскостью xOy (рис. 3.9).

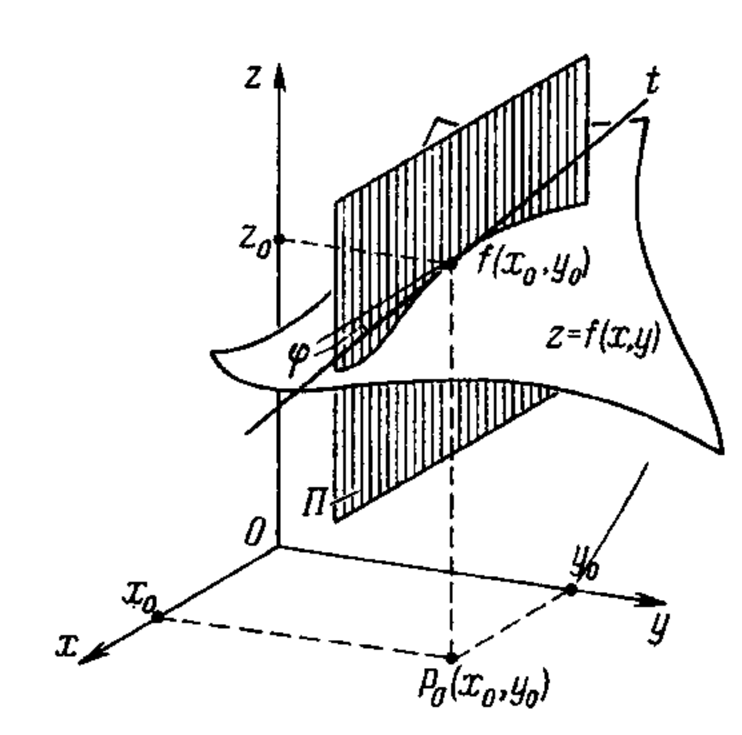


Рис. 3.9

Соответственно $f'_y(x_0, y_0)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой пересечения плоскости $x = x_0$ с графиком функции f и плоскость xOy.

Производные высших порядков. Пусть функция f на открытом множестве $E \subset D(f) \subset \mathbf{R}^n$ дифференцируема по x_k. Тогда f'_{x_k} является функцией с областью определения $D(f'_{x_k}) = E$. Функция f называется в точке $P_0 \in E$ *дважды дифференцируемой* (по x_k, x_l), если функция f'_{x_k} в точке P_0 дифференцируема по x_l. Для второй производной f по x_k и x_l используется обозначение $\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_l\, \partial x_k}$ или $f''_{x_k x_l}(P_0)$.

Посредством полной индукции определяют *частную производную r-го порядка*:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)\Bigg|_{P_0} = \frac{\partial^r f(P_0)}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} = f^{(r)}_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}(P_0).$$

Пример. Для функции $f = e^{x_1} \sin x_2$ имеем

$$f''_{x_1 x_1}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \sin x_1^0,$$

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \cos x_2^0,$$

$$f''_{x_2 x_2}(x_1^0, x_2^0) = -e^{x_1^0} \sin x_2^0.$$

При определенных предположениях можно менять порядок вычисления частных производных функции. Пусть f непрерывна в некоторой окрестности $U(P_0)$ точки $P_0 \in \mathbf{R}^n$. Если существуют частные производные $f'_{x_k}, f'_{x_l}, f''_{x_k x_l}$ в $U(P_0)$ и они непрерывны в точке P_0, то существует частная производная $f''_{x_l x_k}$ в P_0 и $f''_{x_l x_k}(P_0) = f''_{x_k x_l}(P_0)$.

3.1.6.2. Полный дифференциал, производная по направлению, градиент. Пусть область определения $D(f)$ функции f содержит окрестность точки $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $n \geqslant 1$. Функция f называется *дифференцируемой* в точке P_0, если для любых $P(x_1, \dots, x_n)$ из этой окрестности

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0) + \rho(P, P_0) R_1(P),$$

где $\rho(P, P_0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2}$ и $\lim\limits_{P \to P_0} R_1(P) = 0.$

Линейная часть

$$df(P) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0)$$

приращения $f(P) - f(P_0)$ называется *полным дифференциалом* функции f в точке P_0.

График функции $\tilde{f}$, определяемой равенством

$$\tilde{f}(P) = f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0),$$

называется *касательной плоскостью* к графику функции f в точке P_0.

Если f дифференцируема в точке P_0, то f непрерывна в P_0 и дифференцируема по каждому из переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако, если функция непрерывна и дифференцируема по каждому из переменных $x_1, \dots, x_n$ в точке P_0, она не обязательно дифференцируема в этой точке. Если же f непрерывно дифференцируема в точке P_0, то f дифференцируема в точке P_0.

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

непрерывна в $\mathbf{R}^2$. При $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

а при $(x_1, x_2) = (0, 0)$ $f'_{x_1}(0, 0) = \lim\limits_{x_1 \to 0} \dfrac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} = 0$, $f'_{x_2}(0, 0) = 0$.

Следовательно, f дифференцируема в $\mathbf{R}^2$ по x_1 и по x_2. Из того, что $\lim\limits_{n \to \infty} f'_{x_1}(1/n, 1/n) = 1/2 \neq f'_{x_1}(0, 0)$, следует, что f'_{x_1} не является непрерывной в (0; 0). Функция f не дифференцируема в $P_0(0, 0)$, так как в противном случае (если положить, в частности, что $x_1 = x_2 \to 0$) должно было бы иметь место разложение $f(x_1, x_2) - f(0, 0) = \frac{1}{2} x_1 = \sqrt{2}\, x_1 R_1(P)$, где $\lim\limits_{P \to P_0} R_1(P) = 0$, что невозможно, ибо $R_1(P) = \sqrt{2/4}$.

Геометрическая интерпретация полного дифференциала функции двух переменных. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ — точка из области определения функции $z = f(x, y)$. Если положить $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$, то в случае дифференцируемости функции f в P_0

получается формула разложения

$$f(P)-f(P_0)=df(P)+\rho(P,\ P_0)R_1(P),$$

где $\lim\limits_{P\to P_0} R_1(P)=0.$

Если отложить вертикально из $P(x_0+dx,\ y_0+dy)$ (соответственно $P_0(x_0,\ y_0)$) значение функции $f(P)$ (соответственно $f(P_0)$), то получим соответствующие точки поверхности графика функции f. Если же в точке P взять приближенное значение $f(P_0)+df(P)$, то получим точку плоскости, касательной к графику функции в точке P_0, лежащую над точкой P. Полный дифференциал $df(P)$ является приращением значения функции, если поверхность графика f заменена касательной плоскостью к нему, проведенной в точке P_0 (рис. 3.10). Это приближение тем точнее, чем меньше $\rho(P_0,\ P)$.

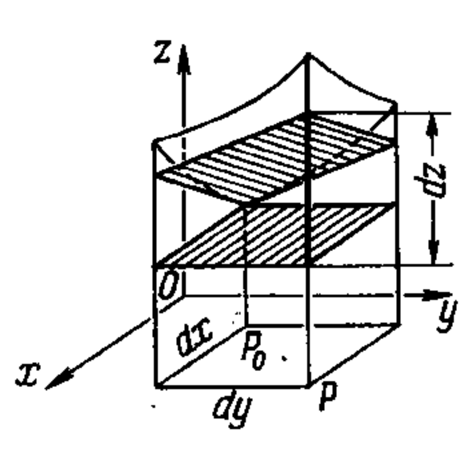


Рис. 3.10

Производная по направлению. Пусть f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)\in\mathbf{R}^n$, и пусть $\mathbf{m}$ – единичный вектор в $\mathbf{R}^n$ ($|\mathbf{m}|=1$) с координатами $m_i=\cos\alpha_i$ ($i=1,\ \ldots,\ n$), где α_i – углы между вектором $\mathbf{m}$ и положительными направлениями осей координат. Предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x_1^0+tm_1,\ \ldots,\ x_n^0+tm_n)-f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)]$$

(если он существует) называется *производной функции f в точке P_0 по направлению* $\mathbf{m}$ и обозначается $\partial f(P_0)/\partial\mathbf{m}$.

Производная функции f по направлению $\mathbf{m}$ равна, следовательно, обыкновенной производной такой функции одного переменного, которая получена из f путем сужения области ее определения до отрезка прямой, проходящего через точку P_0 в направлении вектора $\mathbf{m}$.

Пример. Пусть $f(x_1,\ x_2)=x_1^2+x_2^2$, $P_0=(0,\ 0)$, $\mathbf{m}=\{1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\}$. Тогда

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\mathbf{m}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{k}\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)\right]=\lim_{t\to 0}t=0.$$

Если f дифференцируема в точке P_0, то существует производная по направлению функции f в P_0 относительно произвольного единичного вектора $\mathbf{m}$ и

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\mathbf{m}}=\sum_{k=1}^{n}f'_{x_k}(P_0)\cos\alpha_k.$$

Если f дифференцируема по каждой из координат в точке P_0, то вектор $\{f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0),\ \ldots,\ f'_{x_n}(P_0)\}$ называется *градиентом функции* f в точке P_0 и обозначается символом $\operatorname{grad} f(P_0)$.

Если f дифференцируема в точке P_0, то

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\mathbf{m}}=\operatorname{grad}f(P_0)\cdot\mathbf{m},$$

где справа стоит скалярное произведение. Если $\mathbf{m}$ – вектор в касательной плоскости к поверхности уровня $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\text{const}$, то

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\mathbf{m}}=\operatorname{grad}f(P_0)\cdot\mathbf{m}=0.$$

В общем случае

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\mathbf{m}}=|\operatorname{grad}f(P_0)|\cos(\widehat{\operatorname{grad}f(P_0),\ \mathbf{m}}).$$

Свойства градиента.

1. Градиент функции f перпендикулярен поверхности уровня f.

2. Направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции f (т. е. направление наибольшей производной по направлению).

Примеры. 1) Пусть $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=1/r$, где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $D(f)=\mathbf{R}^3\setminus\{0,\ 0,\ 0\}$ (ньютонов потенциал центрально симметричного силового поля). Тогда $\operatorname{grad}f(P)=-\frac{1}{r^3}\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$. Поверхностями уровня при этом являются сферы с центром в точке начала координат (0, 0, 0). Производная функции f в точке $P(x_1,\ x_2,\ x_3)$ по направлению $\mathbf{m}$ равна

$$\frac{\partial f(P)}{\partial\mathbf{m}}=-\frac{1}{r^3}\sum_{i=1}^{3}x_i\cos\alpha_i.$$

2) Для функции f из примера 2) в 3.1.4.2.2 в точке $P_0(0,\ 0)$ существует производная по любому направлению, несмотря на то что f разрывна в точке P_0.

3.1.6.3. Теоремы о дифференцируемых функциях многих переменных.

Дифференцирование сложной функции. Пусть функция f дифференцируема в точке $P_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, и пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – функции одного переменного, дифференцируемые в точке $t_0\in(a,\ b)$ и такие, что $x_i^0=\varphi_i(t_0)$ ($i=1,\ 2,\ldots,n$). Тогда сложная функция, составленная из f и $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ (см. 3.1.4.2.3), дифференцируема в точке t_0, и ее производная равна

$$\left.\frac{df[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)]}{dt}\right|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)\varphi_i'(t_0).$$

Пример. Пусть функция $f(x_1,\ x_2)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}^2$. Далее, пусть $x_1=\varphi_1(t)=r\cos t$, $x_2=\varphi_2(t)=r\sin t$, где $r=\text{const}$. Сложная функция $F(t)=f(r\cos t,\ r\sin t)$ имеет производную

$$F_t'(t)=r[-f'_{x_1}(r\cos t,\ r\sin t)\sin t+f'_{x_2}(r\cos t,\ r\sin t)\cos t].$$

Дифференцирование неявных функций. Если функция $F(x,\ y)$ непрерывно дифференцируема в области $E\subset R^2$ и существует функция $y=f(x)$, определенная в $(a,\ b)$ и такая, что для всех $x\in(a,\ b)$ уравнение $F(x,\ f(x))=0$ выполняется, и если, кроме того, $F_y'(x,f(x))\neq 0$, то f дифференцируема в $(a,\ b)$ и для каждого $x\in(a,\ b)$ справедливо равенство (ср. 3.1.6.4)

$$F_x'(x,\ f(x))+F_y'(x,\ f(x))f'(x)=0,$$

или

$$f'(x)=-\frac{F_x'[x,\ f(x)]}{F_y'[x,\ f(x)]}.$$

Примеры. 1) Уравнением

$$F(x,\ y)=x^3+y^y=0,\ x<0,\ y\in\mathbf{R},$$

неявно определяется функция $y=f(x)=3\ln(-x)$.

Для нахождения $f'(x)$ не обязательно разрешать уравнение $F(x,\ y)=0$ относительно y: достаточно продифферен-

цировать $F(x, f(x)) = 0$ относительно x и получить $3x^2 + e^y \cdot f'(x) = 0$, откуда $f'(x) = -3/x$.

2) Пусть $F(x, y) = x - \sin y$, $-1 < x < +1$, $y \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Решением уравнения $F(x, y) = 0$ относительно y является $y = f(x) = \arcsin x$. При помощи неявного дифференцирования получаем $1 - \cos y \cdot f'(x) = 0$; следовательно,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Формула Тейлора функции двух переменных. Пусть функция f на множестве

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta, \ \delta > 0\}$$

$r + 1$ раз дифференцируема. Тогда для всех $(x, y) \in E$ справедлива формула

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\left\{(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^k f\right)\Bigg|_{(x_0, y_0)} + R_n(x, y).$$

При этом

$$\left\{(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (x - x_0)^i (y - y_0)^{k-i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}},$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^0} = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^0 \partial y^k} = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial^0 f}{\partial x^0 \partial y^0} = f,$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\left\{(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{n+1} f\right)\Bigg|_{x_0 + \theta(x - x_0),\ y_0 + \theta(y - y_0)},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Величина $R_n(x, y)$ называется *остаточным членом (в форме Лагранжа) формулы Тейлора* для функции f.

Если при $(x, y) \in E$ имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x, y) = 0$, то можно использовать формулу Тейлора для того, чтобы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) приблизить функцию f многочленом n-й степени. Формула Тейлора легко может быть обобщена на функции более чем двух переменных.

Если f дифференцируема в области $E \subset \mathbf{R}^2$ и для всех $(x, y) \in E$ выполнены соотношения $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$, то f постоянна.

Пример. Если разложить функцию $f(x, y) = \sin x \sin y$ в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$ вплоть до остаточного члена $R_3(x, y)$, то получим

$$\sin x \sin y = xy + R_3(x, y),$$

$$R_3(x, y) = -\frac{1}{6}[(x^3 + 3xy^2)\cos\theta x \sin\theta y + (3x^2 y + y^3)\sin\theta x \cos\theta y],$$

где $0 < \theta < 1$. Из $|\cos\theta x| \leqslant 1$, $|\sin\theta x| \leqslant 1$ в силу неравенства треугольника следует, что

$$|R_3(x, y)| \leqslant \frac{1}{6}(|x| + |y|)^3.$$

Таким образом, при небольших значениях $|x| + |y|$ функция $f(x, y)$ близка к функции $f_1(x, y) = xy$, графиком которой является гиперболический параболоид.

3.1.6.4. Дифференцируемое отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$; функциональные определители; неявные функции; теоремы о существовании решения. Пусть в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$ определены функции $f_1, \ldots, f_m$. Если записать сокращенно:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

то отображением $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$ определяется функция $\mathbf{f}$ с областью определения $D(\mathbf{f}) = G$ и множеством значений $W(\mathbf{f}) \subset \mathbf{R}^m$. Функция $\mathbf{f}$ называется *непрерывной*, соответственно *дифференцируемой*, по каждой из координат в G, если все функции $f_i (i = 1, \ldots, n)$ непрерывны, соответственно дифференцируемы, по каждой из координат $x_1, \ldots, x_n$ в области G. Аналогично определяется *непрерывная дифференцируемость* отображения $\mathbf{f}$.

Пусть функция $\mathbf{f}$ определена в области $G \subset \mathbf{R}^n$ и дифференцируема в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$. по каждой из координат. Матрица размера $n \times m$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\Bigg|_{P_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{P_0}$$

называется *функциональной матрицей* функции $\mathbf{f}$ в точке P_0. В случае $m = n$ определитель этой матрицы

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$$

называется *функциональным определителем* или *якобианом* функции $\mathbf{f}$ в точке P_0.

Пример. Якобиан функции $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $f_2(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$ равен

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}\Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ x_2 = x_2^0}} = 4((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2).$$

Свойства дифференцируемых отображений.

1. Если область $G \subset \mathbf{R}^n$ посредством непрерывно дифференцируемой на G функции $\mathbf{f}$ отображается на множество $G' \subset \mathbf{R}^n$ и если для всех $P \in G$ якобиан $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ отличен от нуля, то G' также является областью.

2. Пусть $\mathbf{f}$ является на $G \subset \mathbf{R}^n$ непрерывно дифференцируемой функцией. Пусть также в точке $P_0 \in G$

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\Bigg|_{P_0} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $U(P_0)$ точки P_0, которая отображается функцией $\mathbf{f}$ на некоторую окрестность V точки $\mathbf{f}(P_0)$ взаимно однозначно. При этом в V существует непрерывно дифференцируемая обратная функция $\mathbf{g}$*).

Таким образом, система уравнений

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

*) В этой теореме утверждается только локальная обратимость. Функция $\mathbf{f}$ не обязательно взаимно однозначна на всей области G.

разрешима относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ в некоторой окрестности точки, в которой якобиан отличен от нуля, т. е. существуют непрерывно дифференцируемые функции $g_1,\ldots,g_n$ такие, что

$$x_i = g_i(y_1,\ldots,y_n) \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Пример. Системой уравнений

$$y_1 = f_1(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi, \quad y_2 = f_2(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi$$

определено отображение области $G = \{(\rho, \varphi) \mid \rho > 0, \ \varphi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbf{R}^2$ на $\mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Функции f_1, f_2 непрерывно дифференцируемы в G, и

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Поскольку $\rho > 0$, то указанная выше система уравнений разрешима в некоторой окрестности произвольной точки области G относительно ρ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Получаем

$$\rho = g_1(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

$$\varphi = g_2(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}(y_2/y_1) & \text{при } y_1 > 0,\ y_2 > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y_2/y_1) & \text{при } y_1 < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}(y_2/y_1) & \text{при } y_1 > 0,\ y_2 < 0, \\ \pi/2 & \text{при } y_1 = 0,\ y_2 > 0, \\ 3\pi/2 & \text{при } y_1 = 0,\ y_2 < 0. \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что эти формулы решения справедливы для всех точек из G. Заданное посредством формул $y_i = f_i(\rho, \varphi)$ $(i = 1, 2)$ отображение G на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ взаимно однозначно.

Теорема об умножении якобианов. Пусть функции $f_1,\ldots,f_n$, заданные уравнениями $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i = 1,\ldots,n)$, и функции $g_1,\ldots,g_n$, заданные уравнениями $x_i = g_i(z_1,\ldots,z_n)$ $(i = 1,\ldots,n)$, дифференцируемы по каждой из координат. Тогда функции $F_1,\ldots,F_n$, определенные уравнениями

$$F_i(z_1,\ldots,z_n) = f_i[g_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,g_n(z_1,\ldots,z_n)],$$

где $i = 1,\ldots,n$, дифференцируемы по каждой из координат и соответствующий якобиан равен

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\,\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}.$$

Функции $f_1,\ldots,f_m$ называются *зависимыми* в $G \subset \mathbf{R}^n$, если в $D \subset \mathbf{R}^n$ существует функция, не равная тождественно нулю ни в одной подобласти области D и удовлетворяющая в каждой точке $(x_1,\ldots,x_n) \in G$ соотношению

$$F[f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)] = 0.$$

Следующая теорема дает критерий того, что данная система непрерывно дифференцируемых функций является зависимой.

Пусть функции $f_1,\ldots,f_m$ непрерывно дифференцируемы в ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^n$. Тогда:

1. При $m > n$ функции $f_1,\ldots,f_m$ всегда зависимы.

2. При $m = n$ функции $f_1,\ldots,f_n$ зависимы в G тогда и только тогда, когда якобиан $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ тождественно равен нулю в G.

3. При $m < n$ функции $f_1,\ldots,f_m$ зависимы в G, если ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|$ меньше m.

Примеры. 1) Функции $f_1(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$, $f_2(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}$ независимы в каждой ограниченной области в $\mathbf{R}^2$, поскольку $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = -2e^{2x_1} \neq 0$.

2) Функции $f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1 - x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2)$ являются зависимыми в $\mathbf{R}^2$, так как

$$\sin^2(x_1 - x_2) + \cos^2(x_1 - x_2) - 1 = 0.$$

Для всех $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ имеет место равенство $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0$.

Неявные функции. Пусть в некоторой области G плоскости xOy задана функция F, и пусть линия уровня функции F, определенная соотношением $F(x, y) = 0$, является графиком некоторой функции f, заданной уравнением $y = f(x)$. В этом случае для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$, и говорят, что функция f задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$ или что уравнение $F(x, y) = 0$ является однозначно *разрешимым относительно* y. Может оказаться, что уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо не в общем виде, т. е. не для всех $(x, y) \in M = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$, а лишь локально, т. е. в некоторой окрестности некоторой точки из M.

Пример. Линия уровня, заданная в плоскости xOy уравнением $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$, представляет собой окружность единичного радиуса, которая не может быть графиком функции $y = f(x)$. Уравнение $F(x, y) = 0$, вообще говоря, однозначно неразрешимо. Однако верхняя половина окружности есть график функции $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$ является однозначно разрешимым относительно y при $y \geqslant 0$. Точно так же уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y при $y < 0$. При этом неявно заданная таким образом функция есть $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Ее график — нижняя половина окружности.

Пусть функция F и ее частная производная F'_y непрерывны в области $G \subset \mathbf{R}^2$. Пусть также $F(x_0, y_0) = 0$, $(x_0, y_0) \in G$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует единственная непрерывная функция f, задаваемая уравнением $y = f(x)$, которая определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ в точке x_0, удовлетворяет соотношению $f(x_0) = y_0$, и в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) условия $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in V(x_0, y_0)$ и $y = f(x)$, $x \in U(x_0)$, равносильны. В частности, для каждого $x \in U(x_0)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Если функция F k раз непрерывно дифференцируема, то f также k раз непрерывно дифференцируема (см. 3.1.6.3). (Соответствующее утверждение верно, естественно, и для решения уравнения $F(x, y) = 0$ относительно x.)

Если $\operatorname{grad} F(P_0) \neq \mathbf{0}$, то через точку P_0 проходит только одна линия уровня функции F.

Пример. Уравнение $F(x, y) = xe^y - ye^x + x = 0$ однозначно разрешимо относительно y в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, так как F является непрерывно дифференцируемой в $\mathbf{R}^2$ и $F'_y(0, 0) = -1 \neq 0$. Однако (явное) решение $y = f(x)$ этого уравнения не определяется элементарной функцией. Тем не менее можно, согласно 3.1.6.3, вычислить производную f в точке $x_0 = 0$: $f'(0) = -\dfrac{F'_x(0, 0)}{F'_y(0, 0)} = 2$.

Обобщенная теорема о разрешимости неявных функций. Пусть в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ заданы m функций $F_1,\ldots,F_m$ от $n + m$ перемен-

ных $x_1,\dots,x_n$; $y_1,\dots,y_m$ посредством следующих уравнений:

$$z_i = F_i(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m) \qquad (i = 1,\dots,m).$$

Достаточные условия однозначной разрешимости системы уравнений $F_i(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m) = 0$ $(i = 1,\dots,m)$ относительно $y_1,\dots,y_m$ даются следующей теоремой.

Пусть функции F_i в некоторой окрестности U точки $P_0(x_1^0,\dots,x_n^0;\ y_1^0,\dots,y_m^0) \in G$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно $y_1,\dots,y_m$. Пусть, далее,

$$F_i(P_0) = 0 \ (i = 1,\dots,m), \qquad \left.\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right|_{P_0} \neq 0.$$

Тогда существует такая окрестность V точки $\tilde{P}_0 = \tilde{P}_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и, кроме того, существует такая (однозначно определенная окрестностью V) система определенных и непрерывных в V функций $f_1,\dots,f_m$, что

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \qquad (i = 1,\dots,m),$$
$$y_i^0 = f_i(x_1^0,\dots,x_n^0) \qquad (i = 1,\dots,m),$$

и для каждой точки $(x_1,\dots,x_n) \in V$ выполняется равенство

$$F_i[x_1,\ \dots,\ x_n;\ f_1(x_1,\ \dots,\ x_n),\ \dots,\ f_n(x_1,\ \dots,\ x_n)] = 0 \qquad (i = 1,\dots,m).$$

Если все функции F_i k раз непрерывно дифференцируемы, то все f_i также k раз непрерывно дифференцируемы.

Если уравнения $F_i(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m) = 0$ однозначно разрешимы относительно $y_1,\dots,y_m$, то говорят, что этой системой уравнений *неявно* определяется функция $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_m)$ с областью определения $D(\mathbf{f}) = V \subset \mathbf{R}^n$ и множеством значений $W(\mathbf{f}) \subset \mathbf{R}^m$.

Для вычислений производной $\partial f_k/\partial x_r$ $(k = 1,\dots,m;\ 1 \leqslant r \leqslant n)$ прибегают к обобщенному правилу дифференцирования сложных функций в окрестности точки P_0:

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_r} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_r} \quad (i = 1,\dots,m;\ 1 \leqslant r \leqslant n).$$

Определитель, образованный из коэффициентов этой системы линейных уравнений относительно m неизвестных $\partial f_k/\partial x_r$ $(k = 1,\dots,m)$, есть якобиан

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)},$$

который, согласно условию теоремы, не равен нулю в окрестности точки P_0. В этой окрестности система линейных уравнений однозначно разрешима относительно $\partial f_k/\partial x_r$ $(k = 1,\dots,m)$.

3.1.6.5. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

I. Если f есть функция одного переменного, заданная уравнением $y = f(x)$, то при замене переменного $x = \varphi(t)$ зачастую необходимо выразить производные $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ $(n = 1, 2, 3,\dots)$ через производные функций $f \circ \varphi$ и φ от t. Для первых трех производных по правилу дифференцирования сложной функции получаются следующие формулы (f и $f \circ \varphi$ сокращенно обозначены через y)*):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left[\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\varphi''(t)\frac{d^2y}{dt^2} + [3(\varphi''(t))^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)]\frac{dy}{dt}\right\}.$$

Если заменить зависимое переменное y на u посредством формулы $y = \varphi(u)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u)\frac{du}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u)\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u)\frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u)\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3.$$

При замене x и y на t и u посредством уравнений $x = \varphi(t,\ u)$, $y = \psi(t,\ u)$ справедливы формулы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right] = \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right]$$

Пример. Декартовы координаты x, y связаны с полярными координатами ρ, φ посредством формул

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

В этом частном случае получают

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^3},$$

где $\rho' = d\rho/d\varphi$, $\rho'' = d^2\rho/d\varphi^2$.

II. Если функция f двух переменных задана уравнением $\omega = f(x,\ y)$, то при замене переменных

$$x = \varphi(u,\ v), \qquad y = \psi(u,\ v)$$

частные производные $\partial\omega/\partial x$, $\partial\omega/\partial y$ и частные производные $\partial\omega/\partial u$, $\partial\omega/\partial v$ связаны друг с другом соотношениями

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

---

*) В последующих формулах все функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

откуда следует, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=C\frac{\partial\omega}{\partial u}+D\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

где A, B, C и D суть функции от u и v. Вторые частные производные вычисляются по тем же формулам, но применяемым не к ω, а к частным производным $\partial\omega/\partial x$ и $\partial\omega/\partial y$, например:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=$$

$$=A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Точно так же вычисляются производные высших порядков.

Пример. Выразить оператор Лапласа

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

в полярных координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi,$$

откуда следует:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right).$$

Аналогично вычисляют $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ и получают

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

Для функций более чем двух переменных можно получить аналогичные формулы замены переменных.

3.1.6.6. Экстремумы функций многих переменных. Пусть функция f определена в некоторой области $G\subset\mathbf{R}^n$ и P_0 – точка в G. Значение функции в этой точке $f(P_0)$ называется (локальным) *минимумом*, соответственно (локальным) *максимумом* функции f в G, если существует окрестность $U(P_0)\subset G$ точки P_0 такая, что для всех точек $P\in U(P_0)\setminus\{P_0\}$ имеет место неравенство $f(P)>f(P_0)$, соответственно $f(P)<f(P_0)$. Максимум или минимум функции f называется также (локальным) *экстремумом* функции f в G.

Значение локального экстремума функции f в точке P_0 является наименьшим или наибольшим значением функции в некоторой окрестности точки P_0, однако оно не совпадает, вообще говоря, с наименьшим или наибольшим значением функции в области G.

Пример. Функция $f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ имеет минимум в точке $(0, 0)$, равный $f(0, 0)=0$, который совпадает с наименьшим значением f в $\mathbf{R}^2$.

Необходимое условие существования экстремума. Если $f(P_0)$ – экстремум функции f, дифференцируемой по каждой из координат в некоторой окрестности $U(P_0)$ точки P_0, то выполняются равенства $f'_{x_i}(P_0)=0$ $(i=1,\dots,n)$.

Примеры. 1) Для функции $f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ имеют место равенства $f'_{x_1}(0, 0)=f'_{x_2}(0, 0)=0$.

2) Функция $f(x_1, x_2)=x_1x_2$, $D(f)=\mathbf{R}^2$, не имеет в точке $(0, 0)$ экстремума, несмотря на то что равенства $f'_{x_1}(0, 0)=f'_{x_2}(0, 0)=0$ выполняются.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в $G\subset D(f)\subset\mathbf{R}^n$ и в точке $P_0\in G$ выполняются равенства $f'_{x_i}(P_0)=0$ $(i=1,\dots,n)$. Если, кроме того, положительно (отрицательно) определена квадратичная форма *)

$$Q(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(P_0)z_iz_j,$$

то функция f имеет минимум (максимум) в точке P_0, а если форма $Q(z_1, \dots, z_n)$ неопределенная, то функция f не имеет экстремума в точке P_0.

Если $Q(z_1,\dots,z_n)$ не является ни неопределенной, ни определенной, то требуется дополнительное исследование, чтобы решить, является ли $f(P_0)$ экстремумом.

Частный случай $n=2$. Квадратичная форма $Q(z_1, z_2)$ положительно или отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$D(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0)\\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0)\end{vmatrix}>0.$$

Форма $Q(z_1, z_2)$ положительно (отрицательно) определена, если, кроме того, выполнено неравенство $f''_{x_1x_1}(P_0)>0$ $(f''_{x_1x_1}(P_0)<0)$. При $D(P_0)<0$ квадратичная форма $Q(z_1, z_2)$ – неопределенная. В случае $D(P_0)=0$ необходимо дополнительное исследование.

Пример. Для вычисления значения экстремума функции

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2}x_1^2-4x_1x_2+9x_2^2+3x_1-14x_2+\frac{1}{2}$$

прежде всего находятся решения системы

$$f'_{x_1}(x_1, x_2)=x_1-4x_2+3=0,$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2)=-4x_1+18x_2-14=0.$$

Единственное решение этой линейной системы уравнений есть $(x_1^0, x_2^0)=(1, 1)$. Из того, что $f''_{x_1x_1}(1, 1)=1$, $f''_{x_2x_2}(1, 1)=18$, $f''_{x_1x_2}(1, 1)=-4$, следует, что $D(1, 1)=2>0$; в точке $(1, 1)$ функция f имеет экстремум и поскольку $f''_{x_1x_1}(1, 1)=1>0$, это минимум: $f(1, 1)=-5$.

---

*) Квадратичная форма $Q(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}z_iz_j$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для всех $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbf{R}^n\setminus\{0,\dots,0\}$ имеет место неравенство $Q(z_1,\dots,z_n)>0$ $(Q(z_1,\dots,z_n)<0)$. Если $Q(z_1,\dots,z_n)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $Q(z_1,\dots,z_n)$ называется *неопределенной* (см. также 2.4.4.5.3.3). Форма $Q(z_1,\dots,z_n)$ является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы (a_{ij}) являются положительными (отрицательными) (см. 2.4.4.5), или (*критерий Сильвестра*) тогда и только тогда, когда все *главные миноры* $\det(a_{ij})_{i,\,j=1}^{k}$ $(k=1,\dots,n)$ положительны (имеют знак $(-1)^k$).

Нахождение условных экстремумов. В многочисленных задачах на экстремальные значения (нахождение экстремума некоторой функции) из естественных наук, техники и экономики множество точек, на котором ищут экстремум, подчинено определенным *условиям*, которые зачастую заданы в форме дополнительных уравнений.

Пример. Необходимо определить значение экстремума функции $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ при дополнительном условии $x_1 x_2 = 4$.

Общая *задача на поиск условного экстремума* может быть сформулирована следующим образом: найти все экстремумы и наибольшее и наименьшее значения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенной в области $G \subset \mathbf{R}^n$, для точек $P(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих *дополнительным условиям*

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — действительные функции, определенные в G.

Необходимые условия существования условного экстремума. Пусть функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывно дифференцируемы в G и ранг функциональной матрицы $(\partial\varphi_i/\partial x_k)$ равен m. Положим

$$L = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$$

(функция L называется *функцией Лагранжа* с множителями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — произвольные действительные числа). Если f в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ при дополнительных условиях

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

имеет экстремум, то справедливы соотношения:

a) $$L'_{x_i}(P_0) = f'_{x_i}(P_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial\varphi_k(P_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

б) $$L'_{\lambda_k}(P_0) = \varphi_k(P_0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Таким образом, необходимыми условиями существования условного экстремума функции f в точке P при дополнительных условиях $\varphi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ являются следующие $n + m$ уравнений:

$$L'_{x_i}(P) = f'_{x_i}(P) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial\varphi_k(P)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$L'_{\lambda_k}(P) = \varphi_k(P) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Пример. Среди всех прямоугольников с постоянным периметром надо найти наибольший по площади. Пусть x, y — длины сторон прямоугольника, тогда $F(x, y) = xy$ — его площадь. Дополнительное условие: $\varphi(x, y) = x + y - u/2 = 0$. Система

$$L'_x(x, y) = F'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = y + \lambda = 0,$$

$$L'_y(x, y) = F'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = x + \lambda = 0,$$

$$L'_\lambda(x, y) = \varphi(x, y) = x + y - u/2 = 0$$

имеет единственное решение $x_0 = y_0 = -\lambda_0 = u/4$. Легко заметить, что F в точке (x_0, y_0) имеет локальный максимум, который совпадает с наибольшим значением F при выполнении указанных выше условий.

Два примера задач на экстремумы.

1. *Метод наименьших квадратов.* Пусть в плоскости xOy заданы $N + 1$ точек (x_i, m_i) $(i = 0, 1, \ldots, N)$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Нужно найти функцию $y = f(x, a_0, \ldots, a_{n-1})$, зависящую от x и от n параметров $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ $(n < N)$, график

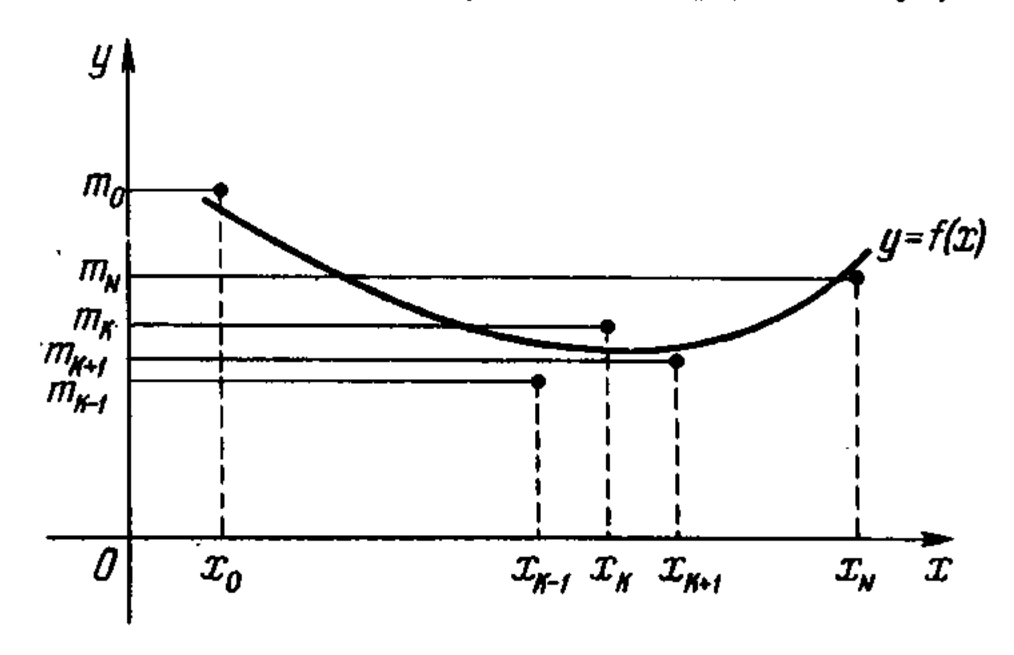


Рис. 3.11

которой как можно лучше приближается к указанным точкам (рис. 3.11). Согласно методу наименьших квадратов, эти параметры выбираются так, чтобы величина

$$Q(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{i=0}^{N} [f(x_i, a_0, \ldots, a_{n-1}) - m_i]^2$$

была наименьшей. Если для величины Q воспользоваться теорией экстремумов, то при соответствующих предположениях о дифференцируемости f получаются необходимые условия для определения параметров $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$: $\partial Q/\partial a_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Эти уравнения называются *нормальными уравнениями.*

Если, в частности, выбрать в качестве f многочлен относительно x: $f(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, то с учетом того, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k - m_i\right) x_i^j,$$

в качестве системы нормальных уравнений получим следующие n линейных уравнений (ср. 2.4.4.3):

$$[x^{n-1}]a_{n-1} + [x^{n-2}]a_{n-2} + \ldots + (N+1)a_0 = [m],$$

$$[x^n]a_{n-1} + [x^{n-1}]a_{n-2} + \ldots + [x]a_0 = [mx],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[x^{2n-2}]a_{n-1} + [x^{2n-3}]a_{n-2} + \ldots + [x^{n-1}]a_0 = [mx^{n-1}];$$

для краткости здесь использованы символы Гаусса

$$[x^k] = \sum_{i=0}^{N} x_i^k \qquad (k = 1, \ldots, 2n-2),$$

$$[mx^k] = \sum_{i=0}^{N} m_i x_i^k \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

2. *Определение оптимального местоположения.* Для N заданных местоположений, изображенных на рис. 3.12 точками $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$, необходимо определить такое местоположение (такую точку $P_0(x_0, y_0)$), сумма расстояний от которого до всех остальных наименьшая. Следовательно, для P_0 должен достигаться минимум функции

$$z(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{N} ((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)^{1/2}.$$

Необходимые условия даются системой двух нелинейных уравнений $z'_{x_0} = 0$ и $z'_{y_0} = 0$, где

$$z'_{x_0} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{x_0 - x_k}{((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)^{1/2}},$$

$$z'_{y_0} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{y_0 - y_k}{((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)^{1/2}}.$$

Решение этой нелинейной системы уравнений является, вообще говоря, сложной задачей.

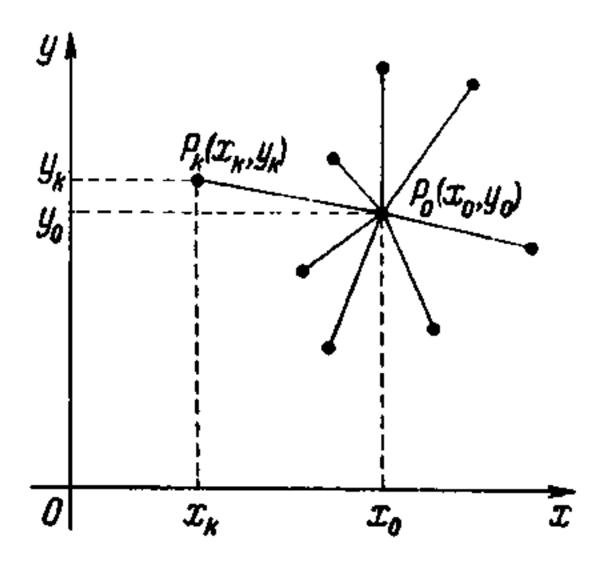


Рис. 3.12

Если выбрать в качестве нулевого приближения

$$x_0^{(0)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \quad y_0^{(0)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k,$$

то при помощи интерационных формул получим

$$x_0^{(k+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}},$$

$$y_0^{(k+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

3.1.7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1.7.1. Определенные интегралы. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Произведем разбиение Z отрезка $[a, b]$ на «элементарные отрезки» введением точек x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим через $\Delta(Z)$ длину наибольшего элементарного отрезка разбиения Z, т. е. $\Delta(Z) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$. В каждом элементарном отрезке выберем произвольное число ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ (рис. 3.13). Число

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется *интегральной суммой* относительно разбиения Z.

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$ в смысле Римана, если существует

Рис. 3.13

число I со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении Z, для которого $\Delta(Z) < \delta$, выполняется неравенство $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$ независимо от выбора ξ_i. Число I называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx;$$

x называется *переменным интегрирования*, a и b — соответственно *нижним* и *верхним* *пределами* интегрирования.

Этому определению равносильно следующее: $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, если для всякой последовательности Z_n разбиений, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(Z_n) = 0$, последовательность $\sigma(Z_n)$ соответствующих интегральных сумм независимо от выбора внутренних точек ξ_k всегда сходится (она сходится в таком случае к одному и тому же предельному значению, которое и есть интеграл).

Если интегрируемость $f(x)$ уже известна, то достаточно найти предел последовательности $\sigma(Z_n)$ для какой-нибудь последовательности разбиений Z_n, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(Z_n) = 0$.

Верхние и нижние суммы Дарбу. Пусть M_i и m_i — соответственно верхняя и нижняя грани $f(x)$ в элементарном интервале $[x_{i-1}, x_i]$ для разбиения Z отрезка $[a, b]$. Числа $S(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ и $s(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ называются соответственно *верхней* и *нижней суммами* разбиения Z.

Критерий интегрируемости Римана. Функция $f(x)$, определенная и ограниченная на $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения Z, где $\Delta(Z) < \delta$, выполняется неравенство $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$.

Классы функций, для которых интеграл Римана всегда существует:

а) функции, непрерывные на $[a, b]$;

б) функции, ограниченные на $[a, b]$ и имеющие конечное число разрывов;

в) ограниченные и монотонные на $[a, b]$ функции.

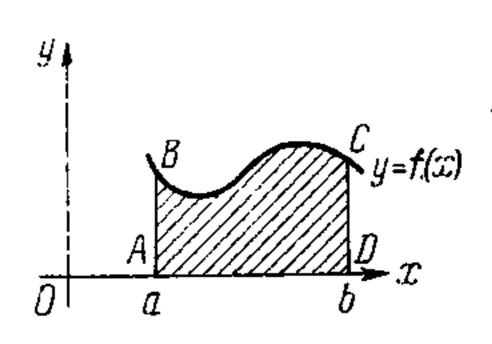


Рис. 3.14

Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой площадь области, ограниченной осью x, графиком $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 3.14).

Если $f(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$, то площадь соответствующей фигуры равна $-\int_a^b f(x)\,dx$.

3.1.7.2. Свойства определенных интегралов.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Перестановка пределов интегрирования: если существует $\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$, то существует

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$, то существует также $\int_a^b f(x)\,dx$ и для любого взаимного расположения точек a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Если существует $\int_a^b f(x)\,dx$, то для любой постоянной α

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

5. Если существуют интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$, то существует также

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$$

и

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

6. Если всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и существуют $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

7. Если существует $\int_a^b f(x)\,dx$, то существует также $\int_a^b |f(x)|\,dx$, и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8. *Первая теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то существует число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует число ξ, $a < \xi < b$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

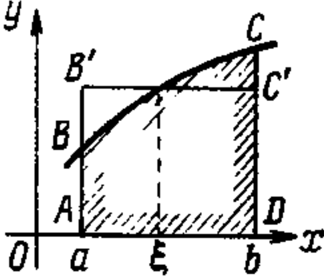


Рис. 3.15

Геометрическая интерпретация; между a и b существует такое ξ, что площадь фигуры $ABCD$ равна площади прямоугольника $AB'C'D$ (рис. 3.15).

9. *Обобщенная первая теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и либо всегда $g(x) \geqslant 0$, либо всегда $g(x) \leqslant 0$, то $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и существует число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна, то существует такое число ξ, $a < \xi < b$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

10. *Вторая теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ монотонна и ограничена, а $g(x)$ интегрируема, то на $[a, b]$ существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

11. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

на отрезке $[a, b]$ непрерывна, а если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то функция $F(x)$ имеет на $[a, b]$ производную, причем $F'(x) = f(x)$.

12. *Интегрирование посредством разложения в ряд.* Если функции $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) интегрируемы на $[a, b]$, а бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно (см. 3.1.14.4) на $[a, b]$, то сумма ряда $f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right).$$

О вычислении определенных интегралов и дальнейших свойствах см. 3.1.7.4 и 3.1.7.7.

3.1.7.3. Неопределенные интегралы. *Первообразная функция.* Функция $F(x)$, дифференцируемая

в некотором интервале (a, b), называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ в этом интервале, если для каждого $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Примеры. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$; $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$ $(x \neq 0)$.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции для $f(x)$ на одном и том же отрезке, то они различаются на аддитивную постоянную: $F_2(x) = F_1(x) + C$, т. е. графики всех первообразных функций образуются из одного из них сдвигом по оси y (рис. 3.16).

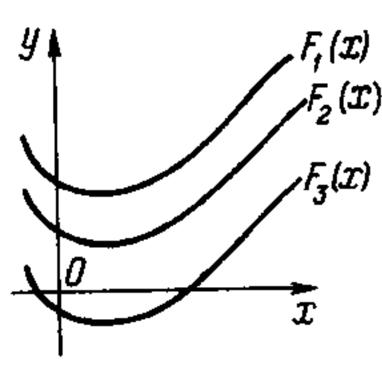


Рис. 3.16

Пример. Функции $F_1(x) = -\arccos x$ и $F_2(x) = \arcsin x$ имеют для $x \in (-1, 1)$ одинаковую производную $1/\sqrt{1-x^2}$ и, следовательно, являются первообразными функциями для $1/\sqrt{1-x^2}$, поэтому

$$\arcsin x = -\arccos x + C;$$

так как $\arcsin 0 = 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, то $C = \pi/2$ и, следовательно,

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором интервале называют множество всех первообразных функций функции $f(x)$ на этом интервале; обозначение:

$$\int f(x)\,dx.$$

Если $F(x)$ какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Поэтому примеры, приведенные в начале пункта, можно записать так:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (x \in (-1, 1));$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0).$$

Вычисление неопределенных интегралов при помощи соответствующих правил интегрирования стараются свести именно к *табличным* интегралам. Зачастую, однако, неопределенный интеграл от некоторой элементарной функции невозможно выразить через элементарные функции (представить в *замкнутой форме*). Это происходит уже при интегрировании таких простых функций, как

$$e^{-x^2},\ \sin x/x,\ \cos x/x,\ 1/\ln x.$$

Для того чтобы проинтегрировать подобную функцию, можно произвести разложение подынтегральной функции в ряд и использовать свойство 12 и 3.1.7.2.

Пример. $e^{-x^2} = 1 - x^2 + x^4/2! - x^6/3! + \dots$

Этот степенной ряд сходится равномерно на всяком ограниченном интервале, поэтому может быть почленно проинтегрирован:

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Тем самым находится представление интеграла в виде хорошо сходящегося степенного ряда.

Интеграл может быть приближенно вычислен разными способами (см. 7.1.2.7).

Не представимые в замкнутой форме (т. е. не являющиеся элементарными функциями), но важные для практики интегралы затабулированы, например:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}(x) \text{ (интегральный логарифм)},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$ (*эллиптический интеграл 1-го рода* (см. 1.1.2.4)).

Таблица основных интегралов. Постоянная интегрирования опущена; указания об интервале определения сделаны только тогда, когда речь идет не об интервале $(-\infty, \infty)$.

Степенные функции

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1;\ x \neq 0, \text{ если } n < 0)$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1 \text{ — действительное, } x > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0)$$

Показательные функции

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1)$$

Тригонометрические функции

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln|\sin x| \quad (x \neq k\pi)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x \quad (x \neq k\pi)$$

Гиперболические функции

$$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x$$

$$\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x$$

$$\int \mathrm{th}\,x\,dx = \ln \mathrm{ch}\,x$$

$$\int \mathrm{cth}\,x\,dx = \ln|\mathrm{sh}\,x| \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x \quad (x \neq 0)$$

Дробно-рациональные функции ($a \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} & (|x| < a), \\ \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} & (|x| > a). \\ \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

Иррациональные функции ($a \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (|x| < a)$$

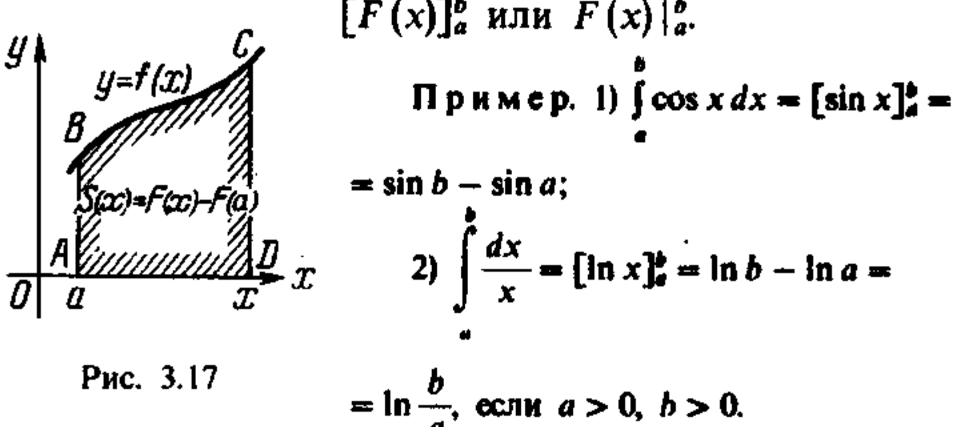
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arsh}(x/a), \\ \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arch}(x/a), \\ \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| & (|x| > a) \end{cases}$$

Выражение определенного интеграла через неопределенный *(основная теорема дифференциального и интегрального исчислений, теорема Ньютона — Лейбница).* Если для функции $f(x)$, интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, существует непрерывная функция $F(x)$ на $[a, b]$, являющаяся первообразной функцией для $f(x)$ на $[a, b]$ (в частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$), то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно вычислить по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

для записи правой части используются символы: $[F(x)]_a^b$ или $F(x)|_a^b$.



Пример. 1) $\int_a^b \cos x\,dx = [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a$;

2) $\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$, если $a > 0$, $b > 0$.

Рис. 3.17

Геометрическая интерпретация первообразной функции. Если $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной неотрицательной функцией $f(x)$, прямыми, проходящими через $(a, 0)$ и $(x, 0)$ и параллельными оси y, и осью x (рис. 3.17), то

$$S(x) = F(x) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная функция для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3.1.7.4. Свойства неопределенных интегралов.

1. *Аддитивность* неопределенного интеграла:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

2. *Постоянный множитель* α можно выносить за знак интеграла:

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

3. Если $F(u)$ — первообразная функция для $f(u)$ в интервале I, то для произвольных постоянных a, b ($a \neq 0$)

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

причем x лежит в интервале, для которого $u = ax + b \in I$.

Пример. $\int \frac{dx}{2x + 3} = \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C$, $x \neq -\frac{3}{2}$.

4. Если $f(x)$ имеет в некотором интервале непрерывную производную и $f(x) \neq 0$, то $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

Пример. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x) + C$.

5. *Интегрирование по частям.* Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некотором интервале I непрерывные производные, то

$$\int u(x) v'(x)\,dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x)\,dx.$$

Примеры. 1) $\int x \sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx = -x \cos x + \sin x + C$.

2) $\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x \ln x - x + C$ (определено в любом интервале, где $x > 0$).

Интегрирование по частям определенных интегралов. Если функции u и v имеют на $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int_a^b u(x) v'(x)\,dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x)\,dx.$$

6. *Интегрирование подстановкой (заменой переменного).* Если функция $f(z)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, функция $z = g(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и $\alpha \leqslant g(x) \leqslant \beta$, то

$$\int f(g(x)) g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz,$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку $z = g(x)$.

Пример. $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int z^3\,dz = \frac{1}{4} z^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$.

Зачастую этой формулой пользуются справа налево; для того чтобы определить $\int f(z)\,dz$, вводят функцию $z = g(x)$ и вычисляют $\int f(g(x)) g'(x)\,dx$; после этого при помощи обратной функции $x = h(z)$ нужно вернуться к исходному переменному x (обратная функция $x = h(z)$ существует, если $g'(x) \neq 0$ на $[a, b]$).

Примеры. 1) $\int \frac{dz}{(\sqrt{1 + z^2})^3}$; подстановка $z = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; значит, $z' = g'(x) = 1/\cos^2 z \neq 0$ и $x = \operatorname{arctg} z$. Тогда

$$\int \frac{dz}{(\sqrt{1 + z^2})^3} = \int \frac{1}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x})^3} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \cos x\,dx = \sin x + C = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} + C = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} + C.$$

2) $\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz$; делаем замену $z = a\cos x$, $x\in(0, \pi)$, так что $g'(x) = -a\sin x \neq 0$ и $x = \arccos(z/a)$; тогда

$$\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz = \int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 x}(-a\sin x)\,dx = -a^2\int\sin^2 x\,dx.$$

Далее, так как $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, то

$$\int\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C,$$

но $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-z^2}$, и после введения обратной функции получим, что

$$\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{z}{a} + \frac{z}{2}\sqrt{a^2-z^2} + C.$$

Правило подстановки (замена переменного) для определенных интегралов. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, а функция g строго монотонна, имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, то справедливы следующие равенства ($z = g(x)$; обратная функция $x = h(z)$):

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz,$$

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(g(x))g'(x)\,dx.$$

В отличие от правила подстановки для неопределенных интегралов, согласно которому необходимо вернуться к исходному переменному, здесь при подстановке нужно сразу изменить пределы интегрирования.

Пример. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz$; подстановка $z = a\cos x$ ($\pi \geqslant x \geqslant 0$ для $-a \leqslant z \leqslant a$) дает

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz = -a^2\int_{\pi}^{0}\sin^2 x\,dx = +\frac{1}{2}a^2\int_0^\pi(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= +\frac{1}{2}a^2\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}a^2\pi.$$

Можно прежде вычислить неопределенный интеграл (см. приведенный выше пример):

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz = \left[-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{z}{a} + \frac{z}{a}\sqrt{a^2-z^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2}a^2\pi.$$

3.1.7.5. Интегрирование рациональных функций. *Дробно-рациональная функция* $R(x)$ – отношение двух многочленов $Q(x)$ и $P(x)$, не имеющих общих множителей:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях. Их интегралы являются линейной комбинацией следующих функций: рациональных функций, логарифма линейных двучленов, логарифма квадратичных трехчленов, арктангенса линейных двучленов.

Если степень $Q(x)$ больше или равна степени $P(x)$, то прежде всего делением $Q(x)$ на $P(x)$ выделяют целую часть. Тогда получают сумму, состоящую из многочлена и правильной рациональной функции $R(x) = f(x) + \frac{Q_1(x)}{P(x)}$, причем степень $Q_1(x)$ меньше степени $P(x)$ и многочлены $Q_1(x)$ и $P(x)$ не имеют общих множителей.

Пример. $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$.

Многочлен $f(x)$ можно сразу же проинтегрировать: если

$$f(x) = c_0x^{m-n} + \ldots + c_{m-n},$$

то

$$\int f(x)\,dx = \frac{c_0}{m-n+1}x^{m-n+1} + \ldots + c_{m-n}x + C.$$

Если деление выполнено, то производится разложение дробно-рациональной функции $\frac{Q_1(x)}{P(x)}$ на простейшие дроби, т. е. $\frac{Q_1(x)}{P(x)}$ раскладывается на сумму дробей, которые затем легко проинтегрировать. Это разложение на простейшие дроби тесно связано с разложением знаменателя $P(x)$ на множители. Делением числителя $Q_1(x)$ и знаменателя $P(x)$ на a_0 можно всегда достичь того, чтобы коэффициент при старшем члене многочлена $P(x)$ был равен 1. По основной теореме алгебры (см. 2.5.1.1.2) имеем

$$P(x) = (x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

где a_ν ($\nu = 1,\ldots,r$) – действительные нули кратности k_ν многочлена $P(x)$, в то время как квадратные трехчлены не имеют действительных нулей, т. е. $p_\mu^2 - 4q_\mu < 0$, $\mu = 1,\ldots,s$. Получение такого представления в виде сомножителей и является, собственно, главной проблемой при интегрировании конкретной дробно-рациональной функции. Далее, каждому из сомножителей $P(x)$ соответствует некоторое число простейших дробей (2.5.1.2.5), а именно каждому сомножителю вида $(x-a)^k$ соответствует сумма простейших дробей

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

и каждому сомножителю вида $(x^2+px+q)^l$ соответствует сумма простейших дробей вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Постоянные A_j, B_j, C_j рассматриваются сначала как неизвестные.

Пример. $R(x) = \frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1}$.

Разложение знаменателя дает

$$P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)^2.$$

Таким образом,

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Для определения коэффициентов A, B, C, D, E, F левую и правую части умножаем на знаменатель $P(x)$ и отбрасываем его.

В вышеприведенном примере после умножения на знаменатель $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$ имеем

$$x + 2 = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 +$$
$$+ (Cx+D)(x-1)(x+1)(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)(x+1).$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x в многочленах, стоящих слева и справа (от x^5 до x^0),

дает систему уравнений

$$\begin{aligned}
x^5&: \quad 0 = A + B + C,\\
x^4&: \quad 0 = A - B + D,\\
x^3&: \quad 0 = 2A + 2B + E,\\
x^2&: \quad 0 = 2A - 2B + F,\\
x^1&: \quad 1 = A + B - C - E,\\
x^0&: \quad 2 = A - B - D - F,
\end{aligned}$$

откуда $A = \frac{3}{8}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{2}$, $E = -\frac{1}{2}$, $F = -1$.

Таким образом, имеет место разложение

$$\frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1} = \frac{1}{8}\left[\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x+4}{x^2+1} - \frac{4x+8}{(x^2+1)^2}\right].$$

Интегрирование простейших (элементарных) дробей. После того, как разложение на простейшие дроби осуществлено, достаточно проинтегрировать полученные дроби. Дроби, знаменатель которых имеет a своим действительным корнем, интегрируются по формулам

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^\nu} = -\frac{A}{\nu-1}\frac{1}{(x-a)^{\nu-1}} + C \quad (\nu \neq 1).$$

Интеграл от дроби $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\nu}$ при $p^2-4q < 0$, т. е. когда знаменатель имеет комплексно-сопряженные корни, преобразованием числителя при $\nu > 1$ приводится к виду

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\nu}dx = \frac{B}{2}\int\frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^\nu} + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu} =$$
$$= -\frac{B}{2(\nu-1)(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}.$$

При $\nu = 1$ после аналогичного преобразования получим

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Вычисление интегралов вида

$$I_\nu = \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}$$

производится по *рекуррентной формуле*

$$I_\nu = \frac{1}{(\nu-1)(4q-p^2)}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \frac{2(2\nu-3)}{(\nu-1)(4q-p^2)}I_{\nu-1},$$

которая позволяет свести вычисление интеграла I_ν после $\nu-1$ шагов к вычислению интеграла $I_1 = \int\frac{dx}{x^2+px+q}$.

Значение последнего интеграла равно

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Таким образом, интегрирование простейшей дроби $-\frac{x+2}{2(x^2+1)^2}$ дает

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

и по рекуррентной формуле

$$I_2 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1,$$

где $I_1 = \int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}x + C$.

В итоге получаем

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C = -\frac{2x-1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

Дальнейшие примеры. 1. $\int\frac{x^4}{(x^2-1)^2}dx$; так как степень многочлена в числителе равна степени многочлена в знаменателе, то, прежде чем приступить к разложению на простейшие дроби, нужно произвести выделение целой части. Имеем

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-1}{(x^2-1)^2}.$$

Далее,

$$\frac{2x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$

Умножение на общий знаменатель дает

$$2x^2 - 1 = A(x+1)^2(x-1) + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2.$$

Значения некоторых коэффициентов (здесь B и D) часто можно получить быстрее, чем методом приравнивания коэффициентов,— *подстановкой нулей знаменателя.* Если подставить в уравнение $x = 1$, то получим, что $2 - 1 = 4B$, т. е. $B = 1/4$. Если подставить $x = -1$, то получается $2 - 1 = 4D$; следовательно, $D = 1/4$. Приравнивая коэффициенты при x^3 и x^0, получаем уравнения $0 = A + C$ и $-1 = -A + B + C + D$; следовательно, $A = 3/4$, $C = -3/4$.

Итак, получаем

$$\int\frac{x^4}{(x^2-1)^2}dx = x + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C = \frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2. $\int\frac{dx}{x^4+1}$; у знаменателя нет вещественных нулей; разложение на квадратичные множители дает $x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}+1)$, а разложение на простейшие дроби —

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Приравниванием коэффициентов находим $B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C_2 = \frac{1}{2}$; следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx.$$

Применяя соответствующие формулы для интегрирования простейших дробей $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, получаем, что

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C_1=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+C_1,$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C_2=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C_2;$$

следовательно, в итоге получаем

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C\qquad(C=C_1+C_2).$$

Таблицы интегралов рациональных функций см. в 1.1.3.3.

3.1.7.6. Интегрирование других классов функций. В дальнейшем $R(u, v, w, \ldots)$ означает рациональную функцию от аргументов $u, v, w, \ldots$

Приводимые ниже интегралы подходящей подстановкой могут быть сведены к интегралам от рациональных функций.

3.1.7.6.1. Интегрирование иррациональных функций.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$; в результате замены переменного $t=\sqrt[n]{ax+b}$, т. е. $x=\frac{1}{a}(t^n-b)$, $dx=\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt$, получаем

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt,$$

т. е. интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=2\int\frac{t+2}{t^3-1}dt$, где $t=\sqrt{x+1}$.

2. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $(ad-bc\neq 0)$; подстановка $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, т. е. $x=\frac{t^nd-b}{a-ct^n}$, $dx=n(ad-bc)\frac{t^{n-1}\,dt}{(a-ct^n)^2}$, приводит к интегралу от рациональной функции.

3. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right)dx$; подстановка $t=\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где r – наименьшее общее кратное чисел $n, m, \ldots$, дает в итоге интеграл от рациональной функции.

4. *Теорема Чебышева.* Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ (a, b – произвольные постоянные, m, n, p – рациональные числа) – интеграл от дифференциального бинома – может быть выражен в элементарных функциях только тогда, когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

а) p – целое; подстановка $t=\sqrt[r]{x}$, где r – наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n, приводит к интегралу от рациональной функции.

б) $\frac{m+1}{n}$ – целое; подстановкой $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$, где r – знаменатель дроби p, получаем интеграл от рациональной функции.

в) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое; при помощи подстановки $t=\sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где r – знаменатель дроби p, получаем интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx$; итак, $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$, $(m+1)/n=2$ – целое.

Подстановка $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt$, приводит к

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int(t^6-t^3)\,dt=$$
$$=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C=\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})(4\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

5. $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx$ $(a\neq 0)$.

Эти интегралы можно свести к интегралам от рациональных функций, от тригонометрических или гиперболических функций (они рассматриваются в 3.1.7.6.2). Преобразуем выражение

$$ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}(ax+b)^2+\frac{ac-b^2}{a}$$

и рассмотрим три возможных случая:

а) $ac-b^2>0$; тогда интересен лишь случай $a>0$, так как при $a<0$ всегда $ax^2+2bx+c<0$. Заменой переменного $t=\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$ получаем, что $ax^2+2bx+c=\frac{ac-b^2}{a}(t^2+1)$, откуда следует, что

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\times$$
$$\times\int R\left(\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}t-\frac{b}{a}, \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\sqrt{t^2+1}\right)dt=$$
$$=\int R_1(t, \sqrt{t^2+1})\,dt.$$

Дальнейшая подстановка, а именно $t=\operatorname{sh}u$ (можно применять и подстановку $t=\operatorname{tg}u$), приводит к интегралу от рациональной функции от

функций $\operatorname{sh} u$ и $\operatorname{ch} u$:

$$\int R_1(t, \sqrt{t^2+1})\,dt = \int R_1(\operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u)\operatorname{ch} u\,du.$$

б) $ac - b^2 = 0$; тогда в подынтегральном выражении содержится полный квадрат, и, извлекая квадратный корень, получаем интеграл от рациональной функции.

в) $ac - b^2 < 0$; подстановкой $t = \dfrac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$ получаем, что $\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a}}\sqrt{t^2-1}$ при $a > 0$ и $\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{\dfrac{b^2-ac}{-a}}\sqrt{1-t^2}$ при $a < 0$.

В результате приходим к интегралу вида $\int R_1(t, \sqrt{t^2-1})\,dt$, если $a > 0$, и $\int R_1(t, \sqrt{1-t^2})\,dt$, если $a < 0$. В первом случае используют подстановку $t = \operatorname{ch} u$ (или $t = \sec u$), во втором случае $t = \cos u$ (или $t = \sin u$); получают соответственно

$$\int R_1(\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u)\operatorname{sh} u\,du, \quad \int R_1(\cos u, \sin u)\sin u\,du.$$

Пример. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$; $ac - b^2 = -1 < 0$ (случай в)). Делаем замену переменного $t = x - 1$; следовательно, $x = t + 1$, $dx = dt$. Тогда (при $t = \operatorname{ch} u$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} u}du = u + C = \operatorname{arch} t + C =$$
$$= \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + C = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2-2x}) + C.$$

Одной из трех *подстановок Эйлера* интегралы рассматриваемого вида можно также сразу свести к интегралам от рациональных функций:

а) если $a > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \begin{cases} t - \sqrt{a}\,x, \\ t + \sqrt{a}\,x; \end{cases}$$

б) если $c > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \begin{cases} xt + \sqrt{c}, \\ xt - \sqrt{c}; \end{cases}$$

в) если $ax^2 + 2bx + c$ имеет два разных действительных корня α и β, то делают замену $\sqrt{ax^2+2bx+c} = t(x-\alpha)$.

6. Интегралы специального вида $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, можно свести к более простому интегралу $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. Полагают

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx =$$
$$= P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+2bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}, \quad (*)$$

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$, коэффициенты которого еще не определены. Для нахождения коэффициентов этого многочлена и числа A дифференцируют левую и правую части равенства (*), полученный результат умножают на $\sqrt{ax^2+2bx+c}$, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов слева и справа.

Пример. $I = \displaystyle\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{\sqrt{x^2-2x}}dx.$

Применяя описанный способ, получаем, что

$$I = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2-2x} + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Дифференцируя обе части, имеем

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{\sqrt{x^2-2x}} =$$
$$= (2ax + b)\sqrt{x^2-2x} + (ax^2 + bx + c)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} + \frac{A}{\sqrt{x^2-2x}},$$

откуда после умножения на $\sqrt{x^2-2x}$ и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях x следует: $a = 1$, $b = -3/2$, $c = -1/2$, $A = -1/2$. Таким образом,

$$\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{\sqrt{x^2-2x}}dx =$$
$$= \left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2-2x}) + C$$

(см. предыдущий пример).

7. *Эллиптические интегралы.* Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + e})\,dx,$$
$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f})\,dx,$$

как правило, не выражаются через элементарные функции; тогда они называются *эллиптическими* интегралами. В результате ряда преобразований можно каждый такой интеграл свести к элементарным функциям и к *эллиптическим интегралам первого, второго* или *третьего рода:*

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \int \frac{(1-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$
$$\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0 < k < 1).$$

Если сделать подстановку $t = \sin\psi$ $(0 < \psi < \pi/2)$, то получим соответственно

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$
$$\int \frac{d\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода в лежандровой форме. Соответствующие определенные интегралы обозначаются по Лежандру $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $\Pi(h, k, \varphi)$:

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k, \varphi),$$
$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = E(k, \varphi),$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\Pi(h,\ k,\ \varphi).$$

Эти функции, кроме переменного φ, содержат еще параметр k или параметры h и k; они затабулированы (см. 1.1.2.4).

3.1.7.6.2. Интегрирование трансцендентных функций.

1. $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$. Делаем замену переменного, полагая $t=\operatorname{tg}(x/2)$ $(-\pi<x<\pi)$, а следовательно, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. Тогда

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

откуда

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

т. е. в итоге получаем интеграл от рациональной функции.

Пример. $$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int\frac{1+t^2+2t}{t^2(1+t^2)}dt=\int\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=2\ln|t|-\frac{1}{t}-\ln(1+t^2)+C=$$

$$=\ln\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{1}{t}+C=\ln\sin^2\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$$

В частных случаях можно применять и более простые подстановки: если функция $R(\sin x,\ \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, то подстановка $t=\cos x$ приводит к интегралу от рациональной функции; если $R(\sin x,\ \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, то подстановка $t=\sin x$ дает интеграл от рациональной функции; если, наконец, $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, то подстановкой $t=\operatorname{tg}x$ получают интеграл от рациональной функции.

Примеры. 1) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$. При помощи подстановки $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$ получают

$$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2t^2}+C=\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$. Здесь подстановка $t=\operatorname{tg}x$ $\left(\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=\operatorname{tg}^2 x\cos^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ дает

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int\frac{(1+t^2)}{(a^2+b^2t^2)}\frac{dt}{(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}t\right)+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

3) $\int\sin^n x\,dx$. Если $n=2m+1$, то полагаем $t=\cos x$;

$$\int\sin^{2m+1}x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^m\sin x\,dx=-\int(1-t^2)^m\,dt=$$

$$=-\cos x+C_m^1\frac{\cos^3 x}{3}-\ldots+(-1)^{m+1}C_m^m\frac{\cos^{2m+1}x}{2m+1}+C.$$

В частности,

$$\int\sin^3 x\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Если $n=2m$, то по *формуле Муавра* получаем

$$\sin^{2m}x=\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\Big[\cos 2mx-C_{2m}^1\cos 2(m-1)x+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\cos 2x+(-1)^m\frac{1}{2}C_{2m}^m\Big].$$

Следовательно,

$$\int\sin^{2m}x\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\Big[\frac{1}{m}\sin 2mx-\frac{1}{m-1}C_{2m}^1\sin 2(m-1)x+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\sin 2x+(-1)^m C_{2m}^m x\Big]+C.$$

4) $\int\cos^n x\,dx$. Если $n=2m+1$, то полагаем $t=\sin x$;

$$\int\cos^{2m+1}x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^m\cos x\,dx=\int(1-t^2)^m dt=$$

$$=\sin x-C_m^1\frac{\sin^3 x}{3}+\ldots+(-1)^m C_m^m\frac{\sin^{2m+1}x}{2m+1}+C.$$

Если $n=2m$, то по *формуле Муавра* получаем

$$\cos^{2m}x=\frac{1}{2^{2m-1}}\Big[\cos 2mx+C_{2m}^1\cos 2(m-1)x+\ldots$$

$$\ldots+C_{2m}^{m-1}\cos 2x+\frac{1}{2}C_{2m}^m\Big].$$

Следовательно,

$$\int\cos^{2m}x\,dx=\frac{1}{2^{2m}}\Big[\frac{1}{m}\sin 2mx+\frac{1}{m-1}C_{2m}^1\sin 2(m-1)x+\ldots$$

$$\ldots+C_{2m}^{m-1}\sin 2x+C_{2m}^m x\Big]+C.$$

В частности,

$$\int\cos^4 x\,dx=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\sin 4x+4\sin 2x+6x\right)+C.$$

5) $\int\sin^n x\cos^m x\,dx$. Если n (или m) нечетно, то подстановка $t=\cos x$ (или $t=\sin x$) приводит к интегралу от рациональной функции. Например,

$$\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int t^2(1-t^2)\,dt,$$

$$t=\sin x.$$

Если оба показателя степени четны (или нечетны), то подстановка $t=\operatorname{tg}x$ приводит к интегралу от рациональной функции. Если, в частности, n и m положительные, то можно использовать преобразования

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Например,

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x\,dx+$$

$$+\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+C.$$

6) $$\int\operatorname{tg}^n x\,dx=\int\operatorname{tg}^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx.$$

7) $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\mathrm{ctg}^{n-1} x - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x\,dx.$

2. $\int R(e^{mx}, e^{nx},\dots,e^{px})\,dx$ ($m, n,\dots,p$ – рациональные числа). В результате подстановки $t = e^x$ получают интегралы вида $\int \frac{1}{t}R(t^m, t^n,\dots,t^p)\,dx$. Если r – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m, n,\dots,p$, то подстановкой $u = \sqrt[r]{t}$ получают интеграл от рациональной функции.

3. $\int R(\mathrm{sh}\,x, \mathrm{ch}\,x)\,dx$. Эти интегралы можно вычислить, заменив гиперболические функции на показательные.

Случаи $\int \mathrm{sh}^n x\,dx$, $\int \mathrm{ch}^n x\,dx$, $\int \mathrm{sh}^n x\,\mathrm{ch}^m x\,dx$ рассматриваются аналогично соответствующим интегралам от тригонометрических функций.

Пример. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x} = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{t + 1/t} =$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,e^x + C.$$

Интегралы вида

4. $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$, 5. $\int P(x)\sin(\alpha x + \beta)\,dx$,

6. $\int P(x)\cos(\alpha x + \beta)\,dx$,

7. $\int P(x)e^{\alpha x}\sin(\alpha x + \beta)\,dx$,

8. $\int P(x)e^{\alpha x}\cos(\alpha x + \beta)\,dx$,

где $P(x)$ – многочлен от x, можно вычислить, применив один или более раз формулу интегрирования по частям.

Примеры. 1) Посредством однократного интегрирования по частям

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}\,dx$$

получают интеграл от функции с многочленом, степень которого на единицу ниже, так что в результате n интегрирований по частям можно вычислить исходный интеграл.

2) В случае интеграла $\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx$ однократное интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{-1}{\alpha}e^{ax}\cos(\alpha x + \beta) + \frac{a}{\alpha}\int e^{ax}\cos(\alpha x + \beta)\,dx;$$

интегрируя по частям второе слагаемое:

$$\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = -\frac{1}{\alpha}e^{ax}\cos(\alpha x + \beta) + \frac{a}{\alpha^2}e^{ax}\sin(\alpha x + \beta) - \frac{a^2}{\alpha^2}\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx,$$

и объединяя интегралы, появляющиеся справа и слева, получаем, что

$$\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{a\sin(\alpha x + \beta) - \alpha\cos(\alpha x + \beta)}{a^2 + \alpha^2}e^{ax} + C.$$

Интегралы вида

9. $\int \ln x\,R'(x)\,dx$, 10. $\int \mathrm{arctg}\,x\,R'(x)\,dx$,

11. $\int \arcsin x\,R'(x)\,dx$,

где $R'(x)$ – производная некоторой рациональной функции $R(x)$, можно интегрированием по частям свести к уже рассмотренным случаям:

$$\int \ln x\,R'(x)\,dx = \ln x\,R(x) - \int \frac{R(x)}{x}\,dx,$$

$$\int \mathrm{arctg}\,x\,R'(x)\,dx = \mathrm{arctg}\,x\,R(x) - \int \frac{1}{1+x^2}R(x)\,dx,$$

$$\int \arcsin x\,R'(x)\,dx = \arcsin x\,R(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}R(x)\,dx.$$

Пример. $\int \ln x\,\frac{dx}{(2x+5)^3} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2x+5)^2}\ln x +$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(2x+5)^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2x+5)^2}\ln x +$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x} - \frac{2}{25}\int \frac{dx}{2x+5} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(2x+5)^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2x+5)^2}\ln x + \frac{1}{100}\ln|x| - \frac{1}{100}\ln|2x+5| + \frac{1}{20}\,\frac{1}{2x+5} + C.$$

Таблица интегралов трансцендентных функций находится в 1.1.3.3.

3.1.7.7. Несобственные интегралы. При введении определенного интеграла предполагалось, что функция $f(x)$ ограничена, а интервал интегрирования конечен. *Несобственные интегралы* являются обобщением определенных интегралов на случай неограниченных функций и *бесконечных* пределов интегрирования.

Интегралы с неограниченными подынтегральными функциями. Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом отрезке $a \leqslant x \leqslant b - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < b - a$, но $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$.

Если существует предел

$$I = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad (*)$$

то он называется *сходящимся несобственным интегралом* от $f(x)$ на $[a, b]$ и его, как и ранее, обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если же предел (*) не существует, то $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *расходящимся несобственным интегралом.*

Если же $f(x)$ ограничена и интегрируема при $a \leqslant x \leqslant b$, то несобственный интеграл сходится и совпадает с определенным интегралом в прежнем смысле.

Примеры. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, ограничена и непрерывна; следовательно, интегрируема. Предельное значение

$$I = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \pi/2$$

существует; таким образом, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

2) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ при $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$, ограничена и непрерывна, но

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to+0}[-\ln(1-x)]_0^{1-\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon)=+\infty;$$

следовательно, $\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x}$ расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл для функций, которые на каждом отрезке $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b$, где $0<\varepsilon<b-a$, ограничены и интегрируемы, но $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Пример. $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$; пусть сначала $0<\alpha<1$:

$$\int\limits_0^1 dx/x^\alpha=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})=\frac{1}{1-\alpha};$$

таким образом, интеграл сходится.

При $\alpha\geqslant 1$ $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ расходится, так как при $\alpha>1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)=+\infty$$

и при $\alpha=1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{1}{\varepsilon}=+\infty.$$

Пусть $f(x)$ не ограничена в окрестности обоих концов отрезка $[a,\ b]$. И пусть c – любая внутренняя точка отрезка $[a,\ b]$: $a<c<b$.

Если каждый из интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходится, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Пример. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a=-1$, $b=1$:

$$\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Если, наконец, $f(x)$ не ограничена в окрестности некоторой внутренней точки c отрезка $[a,\ b]$ и каждый из интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходится, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

или, подробнее,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

Оба предела нужно вычислять по отдельности.

Если в этом смысле несобственный интеграл расходится, но существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right],$$

то его называют *главным значением несобственного интеграла в смысле Коши.* Он обозначается тем же символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что и сам интеграл, либо v. p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пример. Главное значение интеграла $\int\limits_a^b\frac{dx}{x-c}$ равно

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int\limits_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\left(\frac{b-c}{c-a}\right);$$

тогда как несобственный интеграл $\int\limits_a^b\frac{dx}{x-c}$ $(a<c<b)$ не существует.

Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена при $x\geqslant a$ и интегрируема на каждом отрезке $a\leqslant x\leqslant b$. Если существует предел

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то он называется *сходящимся несобственным интегралом* от $f(x)$ на интервале $[a,\ +\infty)$ и обозначается через $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$; таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если же предел I не существует, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется *расходящимся несобственным интегралом.*

Примеры. 1) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-\alpha x}\,dx=$
$=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{b\to+\infty}(1-e^{-\alpha b})=\frac{1}{\alpha}$, если $\alpha>0$, и интеграл сходится; если же $\alpha\leqslant 0$, то интеграл расходится.

$$2)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{-1+\alpha}}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{\alpha-1},$$

если $\alpha > 1$; если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то несобственный интеграл расходится как при $\alpha = 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty,$$

так и при $0 < \alpha < 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) = +\infty.$$

Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_b^a f(x)\,dx$.

Если оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся, то определению полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример. $\int\limits_{-\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx =$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int\limits_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \to +\infty} \int\limits_0^c \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b \to -\infty} (-\operatorname{arctg} b) + \lim_{c \to +\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Главное значение. Если несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходятся, а предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx$ существует, то он называется *главным значением несобственного интеграла.* Его обозначают v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример. Так как функция $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ нечетна, то $\int\limits_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}dx = 0$; отсюда получаем

$$\int\limits_{-b}^{b} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{-b}^{b} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Таким образом, главное значение несобственного интеграла равно

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Сам же несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$ расходится.

Пусть функция $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ обладает конечным числом точек, в окрестности которых она не ограничена. Тогда интервал $[a, +\infty)$ разбивают на соответствующие частичные интервалы и на каждом из этих частичных интервалов вычисляют несобственные интегралы. Если они сходятся, то интеграл на $[a, +\infty)$ определяется как сумма интегралов на этих частичных интервалах.

Критерии сходимости. Они формулируются для интегралов вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$; для других типов справедливы аналогичные утверждения*).

1. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и для $x \geqslant x_0 \geqslant a$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+} f(x)\,dx$ – расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ $(0 \leqslant K \leqslant +\infty)$, то для $K < +\infty$ из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а при $K > 0$ из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, т. е. при $0 < K < \infty$ оба интеграла или одновременно сходятся, или одновременно расходятся.

В случае интеграла $\int\limits_a^b$, $a < b$, от неограниченной в окрестности $x = b$ функции нужно рассмотреть предел $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

В качестве *функций сравнения* в случае $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ особенно удобно использовать функции $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, а в случае интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от неограниченной в окрестности точки $x = b$ функции – $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$.

Примеры. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$. Подынтегральная функция в окрестности точки $x = 0$ не ограничена. По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx;$$

первое слагаемое – сходящийся интеграл, так как при $0 < \alpha < 1$ имеем $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$; второе слагаемое

*) Во многих случаях бывает достаточно уметь ответить на вопрос, сходится ли данный несобственный интеграл или расходится.

сходится, так как при $1 < \alpha < 2$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} = 0.$$

2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Используя $g(x) = \frac{1}{x^2}$, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{1+x^2}} = 1$; таким образом, данный интеграл сходится, так как сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

3) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$. Рассмотрим функцию сравнения $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$. Так как интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и данный интеграл.

Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ (аналогичные определения имеют место для других видов несобственных интегралов). Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ – абсолютно сходящийся интеграл, так как, положив $g(x) = 1/x^{3/2}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} = 0.$$

Связь между несобственными интегралами и бесконечными рядами. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тогда и только тогда является сходящимся, когда для каждой числовой последовательности $\{x_n\}$ $(x_0 = a,\ x_n \geqslant a)$ такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$ сходится и имеет всегда одну и ту же сумму. Эта сумма и является значением несобственного интеграла.

Многочисленные критерии сходимости для бесконечных рядов могут, таким образом, использоваться для исследования сходимости несобственных интегралов, и, наоборот, *интегральный критерий* (см. 3.1 14.2) сводит исследование сходимости рядов к определению сходимости несобственных интегралов.

Геометрический смысл несобственных интегралов. Если функция $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывна, $f(x) \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то он равен площади заштрихованной на рис. 3.18 неограниченной области.

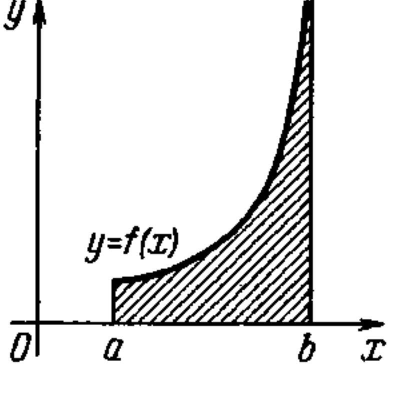


Рис. 3.18

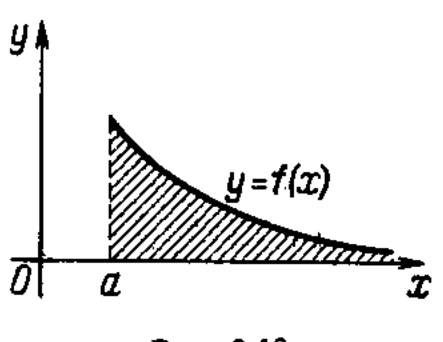


Рис. 3.19

Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он равен площади заштрихованной на рис. 3.19 неограниченной области.

Действия с несобственными интегралами. Свойства определенных интегралов для несобственных интегралов переносятся на интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и другие несобственные интегралы следующим образом:

1. Если сходятся $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то сходятся также $\int\limits_a^{+\infty} Af(x)\,dx$ для любой постоянной A и $\int\limits_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} Af(x)\,dx = A\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

2. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_a^{+\infty},$$

где $[F(x)]_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$. В случае несобственного интеграла от неограниченной функции $f(x)$ справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b,$$

если первообразная функция $F(x)$ непрерывна (точнее, допускает доопределение по непрерывности) в точках, в окрестности которых функция $f(x)$ не ограничена.

Примеры. 1) Первообразная функция для $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ есть

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$$

(см. 3.1.7.5), и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $F(0)=0$.

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2) Первообразная для $f(x)=x^{-1/3}$ есть $F(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}$; она непрерывна при $x=0$; следовательно, $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^1=\frac{3}{2}$.

3) Первообразной для $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ является $F(x)=\ln|x^2-1|$; она имеет разрывы при $x=\pm 1$. Применение формулы к интегралу $\int\limits_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2-1}$ привело бы к неправильному результату 0, тогда как этот интеграл – расходящийся.

3. *Интегрирование по частям.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на интервале $[a, +\infty)$ непрерывные производные, существует $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx$ также сходится и справедлива формула

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx.$$

Примеры. 1) $u(x)=x^n$, $v(x)=e^{-x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}=0$, $\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$ сходится; отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

В результате повторных интегрирований по частям находим

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=n!.$$

2) $u(x)=1/x$, $v(x)=-\cos x$; тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx \qquad (a>0),$$

так как оба слагаемых в правой части имеют смысл. В частности, отсюда следует существование $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ (так как подынтегральное выражение при $x=0$ остается ограниченным).

4. *Правило подстановки.* Если функция $f(z)$ при $z\geqslant\alpha$ непрерывна, функция $z=g(x)$ на $[a, b)$ имеет непрерывную производную $g'(x)\neq 0$ и $g(a)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b} g(x)=+\infty$, то

$$\int\limits_\alpha^{+\infty} f(z)\,dz=\int\limits_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx;$$

при этом интеграл, стоящий справа, может быть как собственным, так и несобственным, и из сходимости одного из интегралов следует сходимость другого.

Примеры. 1) Выше было доказано, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln z}{1+z^2}dz$ сходится; разложим его на два слагаемых:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln z\,dz}{1+z^2}=\int\limits_0^1\frac{\ln z}{1+z^2}dz+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln z}{1+z^2}dz.$$

Подставим $z=1/x$ во второе слагаемое разложения; тогда

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln z}{1+z^2}dz=\int\limits_1^0\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx;$$

отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln z}{1+z^2}dz=\int\limits_0^1\frac{\ln z}{1+z^2}dz-\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0.$$

2) $I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin z\,dz$ сходится, так как $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{1/x^\alpha}=0$ при $0<\alpha<1$. Если подставить $z=2x$, то получим

$$I=2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin 2x\,dx=2\int\limits_0^{\pi/4}\ln(2\sin x\cos x)\,dx=$$
$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin x\,dx+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\cos x\,dx.$$

В результате подстановки $x=\pi/2-u$ получаем

$$2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\cos x\,dx=2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin u\,du,$$

так что

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin x\,dx+2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I;$$

таким образом,

$$I=-(\pi/2)\ln 2.$$

3.1.7.8. Геометрические и физические приложения определенных интегралов.

Длина кривой. Если *плоская кривая* L задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$, причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то она имеет *длину* l, вычисляемую по следующей формуле:

$$l=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Если кривая L – график непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$, то длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если кривая L задана в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$ $(\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1)$, то ее длина может быть вычислена по формуле

$$l=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

Для *кривой в пространстве*, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, длина вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt.$$

Площадь. Если $f(x)$ является неотрицательной непрерывной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функцией, то площадь F криволинейной трапеции $ABCD$ (см. рис. 3.14) вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Площадь S сектора OAB, ограниченного кривой AB, заданной в полярных координатах: $\rho = g(\varphi)$ $(\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$, и радиусами OA и OB (рис. 3.20), определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [g(\varphi)]^2\, d\varphi.$$

О вычислении площадей см. также 3.1.8.6 или 3.1.10.4.

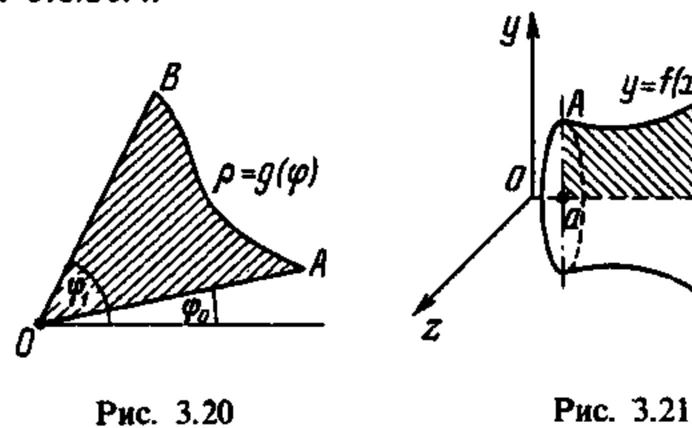


Рис. 3.20 Рис. 3.21

Объем тела вращения. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$; объем V тела, получающегося в результате вращения криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3.21) вокруг оси x, определяется формулой

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Объем V тела, заключенного между двумя плоскостями $x = a$ и $x = b$, в случае, если площадь сечения, проведенного перпендикулярно оси

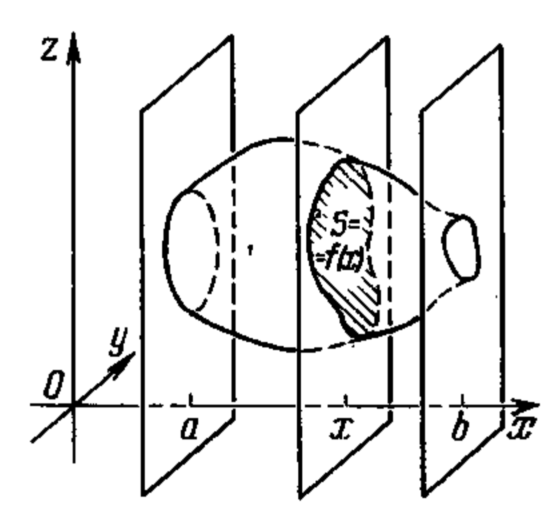


Рис. 3.22

x, есть известная функция x: $S = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ (рис. 3.22), вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b f(x)\, dx.$$

О вычислении объемов см. также 3.1.10.4 и 3.1.11.4.

Площадь поверхности тела вращения. Площадь S поверхности тела вращения, возникающего в результате вращения вокруг оси x, кривой, заданной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ неотрицательной непрерывно дифференцируемой функцией $f(x)$, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Если вращающаяся кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, $\psi(t) \geqslant 0$, то

$$S = 2\pi\int_a^b \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Центр тяжести. Координаты (ξ, η) центра тяжести материальной кривой с линейной плотностью $\delta(x)$, заданной в явном виде: $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, выражаются следующим образом:

$$\xi = \frac{1}{M}\int_a^b \delta(x)\, x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

$$\eta = \frac{1}{M}\int_a^b \delta(x) f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

где M – полная масса: $M = \int_a^b \delta(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

При постоянной плотности $\delta(x)$ второе равенство может быть приведено к виду

$$2\pi l\eta = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

(l – длина кривой). Это – *первая теорема Гульдена*: площадь S поверхности тела вращения, образующегося в результате вращения некоторой плоской кривой вокруг оси, не пересекающей этой кривой, равна произведению длины кривой на длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести кривой: $S = 2\pi\eta l$.

Пример. При вращении окружности радиуса r вокруг не пересекающей ее оси образуется *тор* (рис. 3.23). Если масса распределена по окружности равномерно, то центр тяжести лежит в центре окружности. Пусть d – расстояние

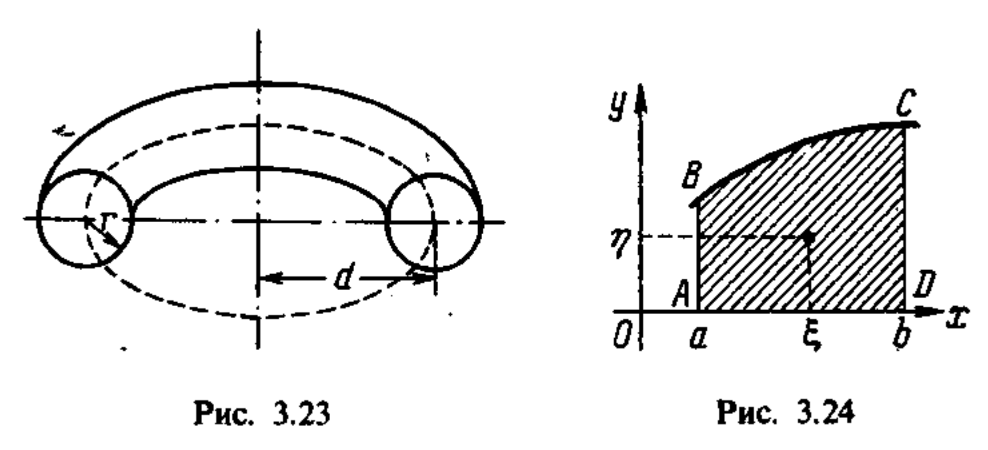


Рис. 3.23 Рис. 3.24

от центра до оси $(d > r)$; тогда центр тяжести описывает окружность длиной $2\pi d$; отсюда по первой теореме Гульдена получается площадь поверхности тора:

$$S = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rd.$$

Координаты (ξ, η) центра тяжести криволинейной трапеции (рис. 3.24) с равномерно распределенной массой (поверхностная плотность $\delta = 1$) и

площадью S вычисляются следующим образом:

$$\xi = \frac{1}{S}\int_a^b x f(x)\,dx, \quad \eta = \frac{1}{2S}\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Из второго равенства следует *вторая теорема Гульдена*: объем V тела, описываемого плоской фигурой при вращении ее вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади S этой фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести этой фигуры: $V = S \cdot 2\pi\eta$.

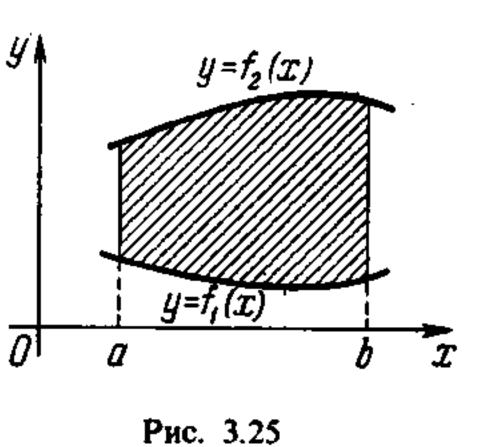


Рис. 3.25

Пример. Объем тора (см. рис. 3.23). Площадь вращающегося круга равна πr^2; таким образом, объем тора равен $V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$.

О вычислении центров тяжести плоских фигур и тел см. также 3.1.10.4 и 3.1.11.4.

Момент инерции. Момент инерции I_y относительно оси y кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ с линейной плотностью $\delta(x)$ вычисляется по формуле

$$I_y = \int_a^b \delta(x)\,x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Момент инерции I_y относительно оси y криволинейной трапеции (рис. 3.25) с постоянной поверхностной плотностью δ равен

$$I_y = \delta \int_a^b x^2 (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

О вычислении моментов инерции см. также 3.1.10.4 и 3.1.11.4.

3.1.8. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл является обобщением введенного в 3.1.7.1 определенного интеграла, при котором функция интегрировалась вдоль отрезка $[a, b]$ действительной оси; в случае криволинейного интеграла функция интегрируется вдоль кривой.

Отрезок плоской кривой, заданной параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

называется *гладким*, если производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и всегда $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Точка со значением параметра t_1 называется *начальной точкой*, а точка со значением параметра t_2 — *конечной точкой* отрезка кривой. Кривая называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких отрезков кривой.

Аналогичное определение имеет место для пространственных кривых, заданных параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$.

3.1.8.1. Криволинейные интегралы 1-го рода (интегралы по длине кривой). Пусть L — отрезок кусочно гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B и $u = f(x, y)$ — ограниченная функция, заданная в некоторой области, содержащей кривую L. На L выбираются произвольные точки $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$; тем самым криволинейный отрезок AB разбивается на элементарные отрезки (разбиение Z) (рис. 3.26).

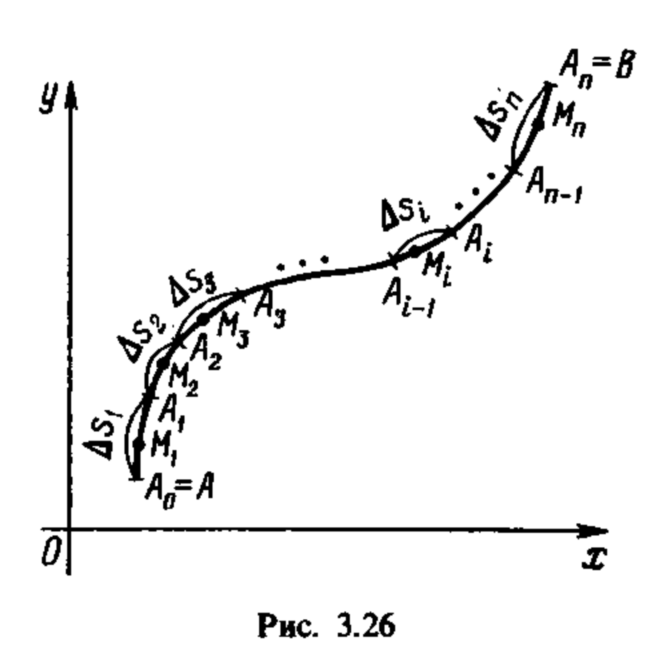


Рис. 3.26

Пусть длина отрезка кривой между A_{i-1} и A_i $(i = 1, \ldots, n)$ равна Δs_i. Пусть, далее, $M_i(\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка на элементарном отрезке A_{i-1}, A_i. Сумма

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i$$

называется *интегральной суммой* относительно разбиения Z. Обозначим через $\Delta(Z)$ максимальное из чисел Δs_i:

$$\Delta(Z) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta s_i.$$

Как и при определении обычного определенного интеграла, число I называется *криволинейным интегралом 1-го рода*, если оно обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, и независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|S(Z) - I| < \varepsilon$.

Обозначения:

$$I = \int_{(L)} f(x, y)\,ds, \quad I = \int_{(AB)} f(x, y)\,ds.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл $\int_{(L)} f(x, y, z)\,ds$ 1-го рода от функции $u = f(x, y, z)$ трех переменных по отрезку L пространственной кривой.

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления движения по кривой L, т. е. если L проходится в противоположном направлении, так что B — начало, а A — конец, то

$$\int_{(BA)} f(x, y)\,ds = \int_{(AB)} f(x, y)\,ds.$$

3.1.8.2. Существование и вычисление криволинейных интегралов 1-го рода. Если отрезок кривой L представлен параметрически: $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, причем l обозначает длину дуги участка кривой L от начальной точки до точки, отвечающей значению параметра s, то криволинейный

интеграл сводится к *определенному интегралу:*

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,ds = \int\limits_0^l f(x(s), y(s))\,ds,$$

и, таким образом, из существования одного интеграла следует существование другого; из этой формулы введением новых переменных интегрирования можно получить и другие представления:

а) Если L – отрезок кусочно-гладкой кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (*)$$

Формально при вычислении криволинейного интеграла нужно, таким образом, представить функцию параметрически и по правилу подстановки для определенных интегралов заменить переменное s на t. Тогда в силу формулы $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ непосредственно получаем формулу (*).

Аналогично для кривой в пространстве имеем

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,ds =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt.$$

б) Если плоская кривая задана в явном виде: $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Пример. Пусть L – полуокружность радиуса r, описанная вокруг начала координат, параметрическое представление которой: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Тогда

$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = r$ и

$$\int\limits_{(L)} y\,ds = \int\limits_0^\pi r\sin t\, r\,dt = 2r^2.$$

3.1.8.3. Криволинейные интегралы 2-го рода (интегралы по проекции и интегралы общего вида). Пусть L – отрезок гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B, $u = f(x, y)$ – функция, заданная в области, содержащей L,

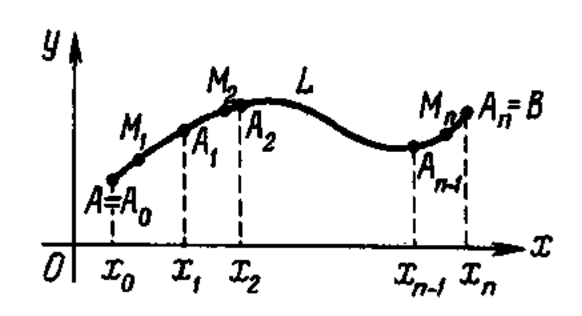


Рис. 3.27

и ограниченная на L. Выберем на L произвольные точки $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$. При этом получается разбиение Z кривой L на элементарные отрезки (рис. 3.27).

Пусть M_i – произвольная точка, лежащая на L между A_{i-1} и A_i $(i = 1, \ldots, n)$, и пусть $A_i = (x_i, y_i)$, $M_i = (\xi_i, \eta_i)$. Тогда сумма

$$S(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей *разбиению* Z. (В отличие от интегральной суммы при криволинейном интеграле 1-го рода здесь $f(\xi_i, \eta_i)$ умножается не на длину Δs_i элементарного отрезка, а на величину Δx_i его проекции на ось x.) Обозначим через $\Delta(Z)$ наибольшее из расстояний от A_{i-1} до A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Число I называется *криволинейным интегралом 2-го рода*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство $|S(Z) - I| < \varepsilon$.

Обозначения:

$$I = \int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx, \quad I = \int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx.$$

Криволинейный интеграл по кусочно гладкой кривой определяется как сумма интегралов по гладким отрезкам кривой, из которых составляется данная кривая. Если начальная и конечная точки совпадают, то получается криволинейный интеграл по *замкнутой кривой*, который обозначается следующим образом:

$$\oint f(x, y)\,dx.$$

Аналогично можно определить для *плоской кривой* число

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dy,$$

а для *пространственной кривой* – числа

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dx, \quad \int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dy, \quad \int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dz.$$

Если на одной плоской кривой определены две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то под

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

понимают сумму обоих интегралов $\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx$ и $\int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy$, т. е.

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + \int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy.$$

Аналогичным образом для пространственной кривой понимается интеграл

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

от трех функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ трех переменных.

3.1.8.4. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 2-го рода. Обычный определенный интеграл есть частный случай криволинейного интеграла, когда в качестве кривой L выбирают

отрезок оси x. Оба интеграла имеют аналогичные свойства:

$$\int\limits_{(L)} af(x, y)\,dx = a\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx \qquad (a = \mathrm{const}),$$

$$\int\limits_{(L)} (f(x, y) + g(x, y))\,dx = \int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx + \int\limits_{(L)} g(x, y)\,dx.$$

Если кривая L состоит из двух кривых L_1 и L_2, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx = \int\limits_{(L_1)} f(x, y)\,dx + \int\limits_{(L_2)} f(x, y)\,dx.$$

Если направление интегрирования по L меняют, принимая B за начальную точку, а A – за конечную, то

$$\int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dx = -\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx.$$

Аналогичные формулы верны для криволинейного интеграла по пространственной кривой.

Криволинейный интеграл зависит от начальной и конечной точек и в общем случае также от пути L, соединяющего обе точки. Он не зависит от пути тогда и только тогда, когда обращается в нуль на каждой замкнутой кривой (см. также 3.1.8.5).

Вычисление. Если L – гладкий отрезок кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, и функция $f(x, y)$ непрерывна на L, то существуют криволинейные интегралы $\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx$ и $\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dy$ и справедлив следующий переход к определенным интегралам:

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt.$$

Аналогично для кривой в пространстве, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, получаем, что

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t)\,dt.$$

Формально нужно, таким образом, как и при замене переменного в определенных интегралах, заменить переменные интегрирования x, y и z на переменное t, используя параметрическое представление L. Это непосредственно приводит к указанным формулам для вычисления криволинейных интегралов.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и наряду с непрерывностью $f(x, y)$ непрерывна и $y(x)$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\,dx.$$

Примеры. 1) $I = \int\limits_{(L)} xy\,dx + (y - x)\,dy$, где L – отрезок параболы $y = x^2$ с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке $(1, 1)$. Параметрическое задание кривой L: $x = t$, $y = t^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 [t^3 + (t^2 - t)\,2t]\,dt = \int\limits_0^1 (3t^3 - 2t^2)\,dt = \frac{1}{12}.$$

2) $I = \int\limits_{(L)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, где L – один виток *винтовой линии* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (-a^3\sin^2 t\cos t + a^2bt\sin t\cos t + ab^2t\cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}a^2b.$$

Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Если L – гладкая кривая на плоскости или гладкая кривая в пространстве, касательная к которой имеет с координатными осями углы α, β или α, β, γ, то

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(L)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds$$

или

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int\limits_{(L)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Если в случае плоской кривой ввести угол $(x,\widehat{\ }\mathbf{n})$ между положительным направлением нормали (получаемым из направления касательной поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки) и осью x, то, учитывая, что $(x,\widehat{\ }\mathbf{n}) = \alpha + \pi/2$, получим

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(L)} [P\sin(x,\widehat{\ }\mathbf{n}) - Q\cos(x,\widehat{\ }\mathbf{n})]\,ds.$$

Пример. Пусть L – кривая, не проходящая через начало координат, и $P = y/r^2$, $Q = -x/r^2$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$. Тогда

$$\int\limits_{(L)} \frac{y}{r^2}dx - \frac{x}{r^2}dy = \int\limits_{(L)} \left[\frac{y}{r^2}\sin(x,\widehat{\ }\mathbf{n}) + \frac{x}{r^2}\cos(x,\widehat{\ }\mathbf{n})\right]ds.$$

Преобразуем этот криволинейный интеграл 1-го рода. Обозначим через $(x,\widehat{\ }\mathbf{r})$ угол, который составляет радиус-вектор $\mathbf{r}$ с осью x (рис. 3.28); тогда

$$x/r = \cos(x,\widehat{\ }\mathbf{r}), \quad y/r = \sin(x,\widehat{\ }\mathbf{r}).$$

Обозначим через $(r,\widehat{\ }\mathbf{n})$ угол между радиусом-вектором и

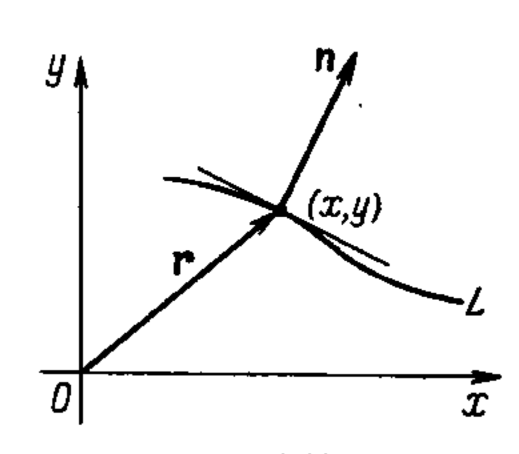


Рис. 3.28

нормалью к L; тогда $(r,\hat{}\mathbf{n}) = (x,\hat{}\mathbf{n}) - (x,\hat{}r)$. Таким образом,

$$\int\limits_{(L)}\left[\frac{y}{r^2}\sin(x,\hat{}\mathbf{n}) + \frac{x}{r^2}\cos(x,\hat{}\mathbf{n})\right]ds = \int\limits_{(L)}\frac{\cos(r,\hat{}\mathbf{n})}{r}ds.$$

Этот так называемый *интеграл Гаусса* геометрически представляет угол, под которым кривая L видна из начала координат. Если кусочно гладкая кривая L является простой замкнутой кривой (т. е. образом окружности при непрерывном взаимно однозначном отображении), то значение интеграла Гаусса равно 2π, если L окружает начало координат и пробегается против часовой стрелки, и равно 0, если начало координат лежит вне L.

3.1.8.5. Независимость криволинейных интегралов от пути интегрирования. Значение криволинейного интеграла, взятого вдоль пути L, соединяющего данную начальную точку A с конечной точкой B, вообще говоря, зависит от пути L.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Двумерный случай. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$ непрерывны в области G, то криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от выбора кривой L, целиком лежащей в G и соединяющей A и B, если в G существует однозначная функция $U(x, y)$, производные которой удовлетворяют условию

$$\partial U/\partial x = P, \qquad \partial U/\partial y = Q,$$

т. е. если $P\,dx + Q\,dy$ является *полным дифференциалом* функции U. Криволинейный интеграл может быть тогда вычислен по следующей формуле:

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A).$$

Если область G односвязна, то необходимым и достаточным признаком существования функции $U(x, y)$ является выполнение *условия интегрируемости*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

для всех точек области G.

Вычисление функции $U(x, y)$. Если (x_0, y_0) – фиксированная точка, а (x, y) – переменная точка односвязной области G и если выполнено условие интегрируемости, то криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy$, взятый по произвольной кривой L, соединяющей эти точки и лежащей в области G, является искомой функцией $U(x, y)$. В случае, когда кривая, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y) в G, состоит из двух отрезков, параллельных координатным осям (рис. 3.29), имеем

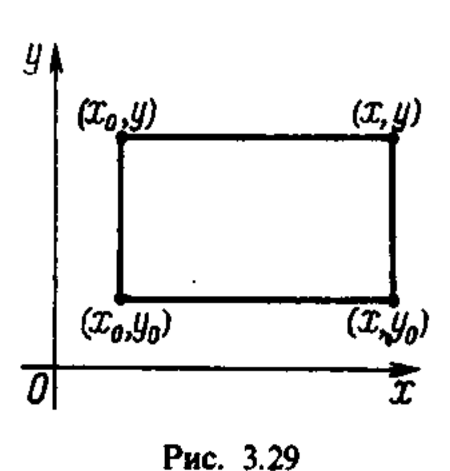


Рис. 3.29

$$U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,d\eta + C,$$

или

$$U(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta + \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y)\,d\xi + C.$$

Примеры. 1) $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Пусть G является односвязной областью, не содержащей начало координат. Тогда в G функции P, Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ непрерывны и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy$, следовательно, не зависит от выбора пути в G, и при $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $y > 0$ получаем, что

$$U(x, y) = \int\limits_{1}^{y}\frac{0\,d\eta}{0^2+\eta^2} + \int\limits_{0}^{x}\frac{-y\,d\xi}{\xi^2+y^2} + C = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C.$$

В области, содержащей начало координат, криволинейный интеграл не зависящим от пути не является. В противном случае он должен был бы обращаться в нуль при интегрировании по окружности радиуса r с центром в начале координат; однако в этом случае

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0.$$

2) Функцию $U(x, y)$ можно найти также следующим образом: пусть $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = x - y$; тогда равенство $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ всегда выполнено. Искомая функция $U(x, y)$ должна удовлетворять условию $\partial U/\partial x = P = x + y$. Интегрированием по x получаем $U = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)$ с постоянной интегрирования $\varphi(y)$, зависящей от y.

Из условия $\partial U/\partial y = Q$ следует теперь, что $x + \varphi'(y) = x - y$, откуда $\varphi'(y) = -y$; следовательно, $\varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$. Таким образом,

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + C.$$

Трехмерный случай. Пусть G – некоторая односвязная пространственная область, т. е. область, которая наряду с каждой замкнутой кривой содержит также некоторую поверхность, границей которой является эта кривая (в этом смысле область между двумя концентрическими сферами является односвязной поверхностью, а тор (см. рис. 3.23) – нет). Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}$ непрерывны в G. Если A и B – две точки в G, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависит от выбора кривой L, соединяющей эти точки, тогда и только тогда, когда существует функция $U(x, y, z)$, для которой

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. когда подынтегральное выражение криволинейного интеграла является *полным дифференциалом* некоторой функции $U(x, y, z)$.

Необходимым и достаточным условием существования функции $U(x, y, z)$ является выполнение *условий интегрируемости*

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

в предположении, что функции P, Q, R вместе с частными производными непрерывны в G.

Функция $U(x, y, z)$ может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла, взятого по любой кривой L, соединяющей точку (x_0, y_0, z_0) с точкой (x, y, z) и лежащей в G. Если отрезки, параллельные координатным осям (рис. 3.30), лежат в G, то получим формулу

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)\,d\zeta + C$$

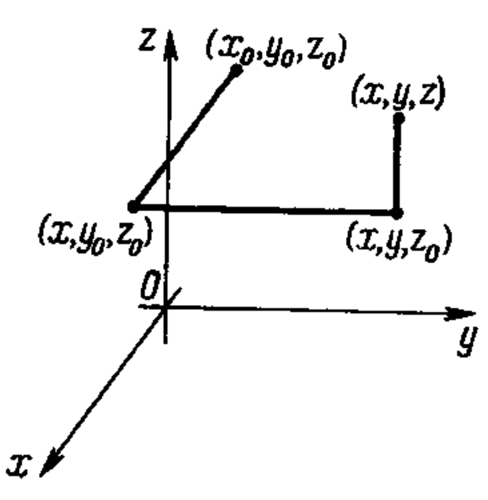


Рис. 3.30

или пять других формул, аналогичных этой, которые получатся, если выбрать другие пять путей интегрирования, частичные отрезки которых параллельны координатным осям.

Пример. $P = x^2 - yz$, $Q = y^2 - xz$, $R = z^2 - xy$. Условия интегрируемости выполнены во всем пространстве; для $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ получаем

$$U(x, y, z) = \int_0^x \xi^2\,d\xi + \int_0^y \eta^2\,d\eta + \int_0^z (\zeta^2 - xy)\,d\zeta + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz + C.$$

3.1.8.6. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов.

1. Ориентированная *площадь* S области, ограниченной плоской замкнутой кривой L:

$$S = \frac{1}{2}\oint_{(L)} x\,dy - y\,dx.$$

При этом S получается положительной или отрицательной в зависимости от того, где находится область G при обходе по границе L – слева или справа.

Пример. Площадь области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; параметрическое задание эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = ab\pi.$$

2. *Масса и центр тяжести* кривой L. Если масса гладкой кривой L распределена с линейной плотностью $\delta(x, y, z)$, то полная масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{(L)} \delta(x, y, z)\,ds,$$

а координаты центра тяжести равны

$$\xi = \frac{1}{M}\int_{(L)} x\delta\,ds, \quad \eta = \frac{1}{M}\int_{(L)} y\delta\,ds, \quad \zeta = \frac{1}{M}\int_{(L)} z\delta\,ds.$$

Пример. Вычислим массу и координаты центра тяжести *циклоиды* $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ с равномерно распределенной массой $(\delta = 1)$:

$$M = \int_{(L)} 1\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt = 8r,$$

$$\xi = \frac{1}{8r}\int_{(L)} x\,ds = \frac{1}{8r}r^2\int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt = \pi r,$$

$$\eta = \frac{1}{8r}\int_{(L)} y\,ds = \frac{1}{8r}r^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt = \frac{4}{3}r.$$

3. *Работа силы* вдоль кривой L. Если $P\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2 + R\mathbf{e}_3$ – сила, которая вдоль кривой L меняется по величине и направлению ($\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – ортонормированный базис), то при движении материальной точки единичной массы под влиянием этой силы совершается работа

$$A = \int_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Работа тогда и только тогда не зависит от пути L, соединяющего две точки, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$ (так называемого *потенциала силового поля*). В этом случае работа вычисляется как разность потенциалов в данных точках.

Пример. Если компоненты силы равны $P = x/r^3$, $Q = y/r^3$, $R = z/r^3$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то существует потенциал, а именно $U(x, y, z) = -1/r$, и сила совершает вдоль некоторой кривой L, соединяющей точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) и не проходящей через $(0, 0, 0)$, работу

$$A = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$$

3.1.9. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

3.1.9.1. Определение интеграла, зависящего от параметра. Если функция $f(x, y)$ определена при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ и при каждом фиксированном y интегрируема по x, то равенство

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

определяет на отрезке $[c, d]$ некоторую функцию F переменного y, называемого в этом случае *параметром*.

Пример. $\arcsin y = \int_0^1 \frac{y\,dx}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$, что легко проверить подстановкой $z = xy$.

3.1.9.2. Свойства интегралов, зависящих от параметра. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то функция $F(y)$ также непрерывна при $c \leqslant y \leqslant d$. В частности, $F(y)$ можно

интегрировать. При этом

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy$$

(повторный интеграл); *порядок интегрирования* может быть изменен:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Скобки могут быть опущены, если договориться, что внешнему знаку интеграла ставится в соответствие внешний дифференциал. Если частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывна, то функцию $F(y)$ можно *дифференцировать* по y и

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру интегралов, зависящих от параметра, часто используют для вычисления определенных интегралов.

Примеры. 1) Функция $f(x, y) = x^y$ и производная $\partial f/\partial y = x^y \ln x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y > 0$ непрерывны. Из того, что

$$F(y) = \int_0^1 x^y\,dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1},$$

следует равенство

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_0^1 x^y\,dx = \int_0^1 x^y \ln x\,dx = -\frac{1}{(y+1)^2}.$$

Дифференцируя равенство $\int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}$ последовательно n раз, получим

$$\int_0^1 x^y (\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(1+y)^{n+1}}.$$

2) Функция $f(x, y) = x^y$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$ $(a > 0)$ непрерывна; поэтому порядок интегрирования может быть изменен:

$$\int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx.$$

Из того, что

$$\int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}, \qquad \int_a^b x^y\,dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

следует формула

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Переменные пределы интегрирования. Если $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны и дифференцируемы при $c \leqslant y \leqslant d$ и если $f(x, y)$ имеет непрерывную частную производную по y в области, содержащей точки (x, y) с $\varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 3.31), то зависящий от параметра интеграл

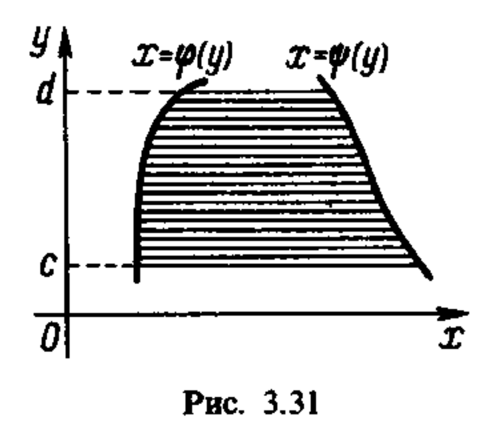


Рис. 3.31

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$$

при $c \leqslant y \leqslant d$ можно *дифференцировать*, и его производная имеет вид

$$F'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy + f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y).$$

Пример. $F(y) = \int_\sigma^y \frac{(y-x)^n}{n!} f(x)\,dx$; $f(x)$ непрерывна; $\sigma = \text{const}$; тогда

$$F'(y) = \int_\sigma^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)\,dx.$$

Посредством последующих дифференцирований найдем

$$F^{(n+1)}(y) = f(y).$$

3.1.9.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Часто рассматриваются несобственные интегралы, зависящие от параметра, например

$$F(y) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1-y^2x^2)}} \qquad (|y| < 1),$$

$$F(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x}\,dx \qquad (y > 0).$$

При этом первый интеграл берется от функции, неограниченной при $x = \pm 1$, а второй – на бесконечном интервале. Оба типа интегралов имеют сходные свойства, поэтому ограничимся рассмотрением только одного из них.

Равномерная сходимость. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится при каждом y из некоторого интервала I. Этот интеграл называется равномерно сходящимся на I, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $x(\varepsilon)$, не зависящая от $y \in I$ и такая, что для любого $b > x(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Пример. Интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-yx}\,dx$ при $y \geqslant 0$ сходится и представляет, таким образом, некоторую функцию $F(y)$,

причем $F(0)=0$; при $y>0$ имеет место сходимость, так как

$$\int_0^b ye^{-xy}\,dx=\int_0^{by} e^{-z}\,dz=1-e^{-by}.$$

На каждом отрезке $0<c\leqslant y\leqslant d$ интеграл равномерно сходится, так как при $b>x(\varepsilon)=\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{c}$ имеем

$$\int_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx=\int_{by}^{+\infty} e^{-z}\,dz=e^{-by}\leqslant e^{-bc}<\varepsilon.$$

Достаточные признаки равномерной сходимости.

1. Если существует функция $\varphi(x)$ такая, что при $x\geqslant x_0>a$ и при всех $y\in I$

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x),$$

и если интеграл $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на I.

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$; при $x\geqslant 0$, $y\geqslant y_0>0$ имеем $|e^{-xy}\sin x|\leqslant e^{-xy_0}=\varphi(x)$ и $\int_0^{+\infty} e^{-xy_0}dx$ сходится; следовательно, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$ равномерно сходится при $y\geqslant y_0>0$.

2. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на I, если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а функция $g(x,y)$ на I равномерно ограничена и монотонна по x.

Пример. Интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx$ равномерно сходится, так как несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ является сходящимся (см. 3.1.7.7), а функция $g(x,y)=e^{-xy}$ при $y\geqslant 0$ равномерно ограничена ($e^{-xy}\leqslant 1$) и монотонна по x.

Если функция $f(x,y)$ при $x\geqslant a$, $y\in I$ непрерывна и $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится, то функция $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ непрерывна на I, т. е. для любого $y_0\in I$

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx.$$

При этих условиях $F(y)$ можно *интегрировать*, и при $c,d\in I$ имеем

$$\int_c^d\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^{+\infty}\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов, зависящих от параметра, часто используются при вычислении несобственных интегралов.

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx$ при $y\geqslant c>0$ равномерно сходится, и $F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx=\dfrac{1}{y}$, откуда следует, что

$$\int_c^d\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx\,dy=\int_c^d\frac{1}{y}\,dy=\ln\frac{d}{c}.$$

С другой стороны, после изменения порядка интегрирования имеем

$$\int_0^{+\infty}\int_c^d e^{-yx}\,dy\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-cx}-e^{-dx}}{x}\,dx;$$

следовательно,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-cx}-e^{-dx}}{x}\,dx=\ln\frac{d}{c}.$$

В случае неравномерной сходимости изменение порядка интегрирования, как показывает следующий пример, может оказаться невозможным: пусть $a>0$, $b>0$ и

$$F(y)=\int_1^{+\infty}(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dx=\frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y};$$

отсюда

$$\int_0^1 F(y)\,dy=\int_0^1\frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy;$$

так как, с другой стороны, $\int_0^1(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dy=-\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$, то при $a\neq b$

$$\int_0^1\int_1^{+\infty}(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dx\,dy-\int_1^{+\infty}\int_0^1(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy+\int_1^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}\neq 0.$$

Если, кроме того, при $y\in I$ существует и непрерывна функция $f'_y(x,y)$ при $x\geqslant a$ и интеграл $\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходится на I, то функция $F(y)$ *дифференцируема* на I и имеет производную

$$F'(y)=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Пример. $F(y)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx$, $y\geqslant 0$.

Интегралы $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$ равномерно сходятся при $y\geqslant y_0>0$. Отсюда вытекает, что для любого $y>0$ выполняется равенство

$$F'(y)=-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Интеграл можно вычислить:

$$-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = \left[\frac{\cos x + y\sin x}{1+y^2}e^{-xy}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+y^2},$$

так что $F'(y) = -1/(1+y^2)$. Отсюда $F(y) = C - \operatorname{arctg} y$. Так как $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0$, то $C = \pi/2$ и

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y;$$

в частности, при $y = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

3.1.9.4. Примеры интегралов, зависящих от параметра.

1. *Бета-функция* (*эйлеров интеграл* 1-*го рода*):

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Этот интеграл есть функция от параметров x и y; он сходится при $x > 0$, $y > 0$ и расходится, если либо $x \leqslant 0$, либо $y \leqslant 0$.

Свойства бета-функции.

1) $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$.

2) $\mathrm{B}(x, y) = \dfrac{y-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x, y-1)$.

3) $\mathrm{B}(x, n) = \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$ при $n = 1, 2, \ldots$

4) $\mathrm{B}(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$.

5) $\mathrm{B}(x, 1-x) = \dfrac{\pi}{\sin x\pi}$ $(0 < x < 1)$.

2. *Гамма-функция* (*эйлеров интеграл* 2-*го рода*):

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Этот несобственный, зависящий от параметра x интеграл сходится при $x > 0$, а при $x \leqslant 0$ расходится. Подстановками $u = e^{-t}$ и $u = \ln t$ получаем соответственно

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln\frac{1}{u}\right]^{x-1} du, \qquad \Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu}e^{-e^u}\,du.$$

Свойства гамма-функции.

1) При $x > 0$ гамма-функция непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\,dt.$$

2) Представление Гаусса (в виде произведения):

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x\frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \quad (x > 0).$$

3) Функциональное равенство: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4) $\Gamma(n+1) = n!$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

5) Связь с бета-функцией:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

6) Закон дополнения:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi} \quad (0 < x < 1).$$

7) Закон удвоения Лежандра:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

Теорема умножения:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{(2nx-1)/2}}\Gamma(nx).$$

8) Формула Раабе: $\displaystyle\int_x^{x+1} \ln\Gamma(u)\,du = x(\ln x - 1) + \ln\sqrt{2\pi}$.

9) Формула Гаусса:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt$$

(C – постоянная Эйлера, $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln n\right)$, $C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\ldots$).

10) Формула Коши:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{\infty}\left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right]\frac{dt}{t}.$$

Некоторые интегралы, связанные с гамма-функцией, содержатся в 1.1.3.4.

3.1.10. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1.10.1. Определение двойного интеграла и элементарные свойства. Пусть S – ограниченная область *) плоскости x, y с кусочно гладкой границей, и пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на S. Посредством сетки кусочно гладких кривых (рис. 3.32) область S разбивают на конечное число элементарных областей S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с площадями ΔS_i (*разбиение* Z); пусть $\Delta(Z)$ – наибольший из диаметров элементарных областей S, получающихся при разбиении Z. В каждой из элементарных областей выбирается произвольная точка $M_i = (x_i, y_i)$. Число $\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$ ставится в соответствие каждому

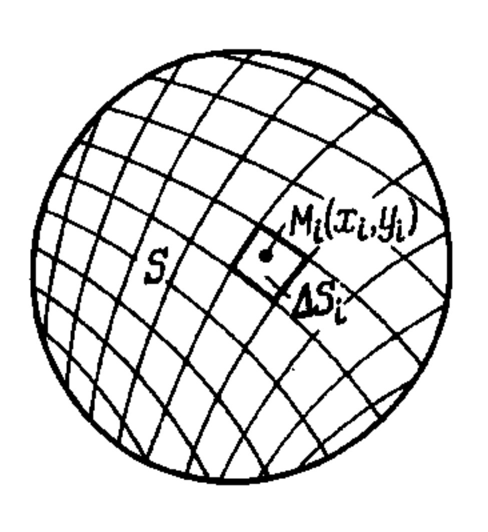


Рис. 3.32

*) В 3.1.10–3.1.13 термин «область» всегда означает «замкнутая область».

разбиению Z и выбору точек $M_i \in S_i$ и называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $M_i \in S_i$.

Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* по области S (*в смысле Римана*), если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого разбиения Z области S, для которого $\Delta(Z) < \varepsilon$, и независимо от того, какие точки M_i выбираются в элементарных областях, выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$. Число I называется *двойным интегралом* (*Римана*) от $f(x, y)$ по области S и обозначается следующим образом:

$$I = \iint_{(S)} f(x, y)\,dS,$$

$$I = \iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Эквивалентным этому определению является следующее: $f(x, y)$ интегрируема по S, если для каждой последовательности Z_n разбиений с $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(Z_n) = 0$ последовательность соответствующих интегральных сумм $\sigma(Z_n, \{M_i^{(n)}\})$ всегда сходится независимо от выбора промежуточных точек $\{M_i^{(n)}\}$ (в этом случае все последовательности интегральных сумм сходятся к одному и тому же значению, которое и есть двойной интеграл).

Интегрируемые функции.

а) Каждая непрерывная на S функция является интегрируемой по S.

б) Каждая ограниченная на S функция, которая непрерывна на S, за исключением точек, лежащих на конечном числе гладких кривых, интегрируема по S; значения функции на таких кривых можно произвольно изменять (если только измененная функция остается ограниченной), не меняя значения интеграла.

Свойства двойных интегралов. Если функции интегрируемы по области, то имеют место следующие свойства.

1) *Аддитивность относительно подынтегральных выражений:*

$$\iint_{(S)} [f(x, y) + g(x, y)]\,dx\,dy = \iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{(S)} g(x, y)\,dx\,dy.$$

2) *Аддитивность относительно областей*: если S_1, S_2 – две области без общих внутренних точек, то

$$\iint_{(S_1 \cup S_2)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{(S_1)} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{(S_2)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

3) *Постоянный множитель* можно выносить за знак интеграла:

$$\iint_{(S)} Af(x, y)\,dx\,dy = A\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

4) Если для каждой точки $(x, y) \in S$ выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \int_{(S)} g(x, y)\,dx\,dy.$$

5) Если $f(x, y)$ интегрируема по S, то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема по S и

$$\left|\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_{(S)} |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

6) Если m является нижней, а M – верхней границей для $f(x, y)$ на S, и если ΔS – площадь области S, то

$$m\,\Delta S \leqslant \iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant M\,\Delta S.$$

7) *Теорема о среднем значении.* Если $f(x, y)$ непрерывна в (связной) области S, то существует по меньшей мере одна точка $(\xi, \eta) \in S$ такая, что

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta)\,\Delta S.$$

8) Если $\{S_n\}$ – последовательность областей с площадями ΔS_n и диаметрами ρ_n и если каждая область содержит точку M и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ (в этом случае говорят, что последовательность S_n стягивается в точку M), то для непрерывной функции $f(x, y)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta S_n} \iint_{(S_n)} f(x, y)\,dx\,dy = f(M)$$

(*дифференцирование по области*).

3.1.10.2. Вычисление двойных интегралов.

а) Если

$$S = \{(x;\ y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\},$$

где y_1, y_2 – непрерывные функции на $[a, b]$ (рис. 3.33), то

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

т. е. двойной интеграл может быть вычислен в результате двух последовательно проведенных простых интегрирований. Скобки можно опустить,

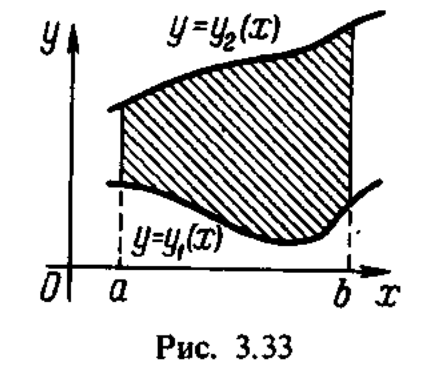


Рис. 3.33

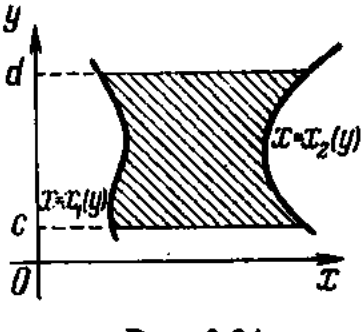


Рис. 3.34

если условиться, что второму знаку интеграла соответствует первое переменное интегрирования.

б) Аналогичная формула имеет место для

$$S = \{(x, y) \mid x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

(рис. 3.34):

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx \right) dy.$$

Пример. Пусть S – область, заключенная между кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ (рис. 3.35); тогда $a=0$, $b=1$, $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=\sqrt{x}$; отсюда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx;$$

если, в частности, $f(x, y)=xy$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{2}x(x-x^4)\,dx=\frac{1}{12}.$$

Область S может быть описана также в форме б), где $c=0$, $d=1$, $x_1(y)=y^2$, $x_2(y)=\sqrt{y}$. Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

в) Если область S можно разбить на конечное число областей, заданных, как в случаях а) или б)

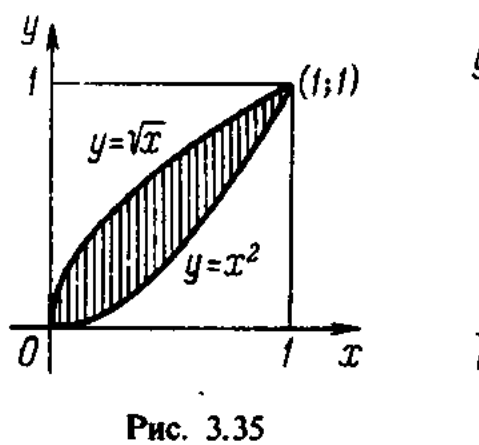


Рис. 3.35

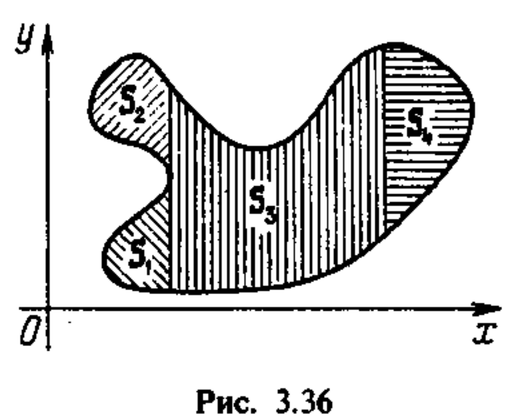


Рис. 3.36

(рис. 3.36), то для вычисления интеграла по S используется свойство 2) из 3.1.10.1.

3.1.10.3. Замена переменных в двойных интегралах. Пусть функции $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ взаимно однозначно отображают открытую область G, содержащую область G плоскости u, v с кусочно гладкой границей, на открытую область P, содержащую область S плоскости xy, и пусть S – образ G, причем в O функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и их первые частные производные непрерывны, а якобиан отличен от нуля:

$$J=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на S, то справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)} f(x(u, v), y(u, v))\,|J|\,du\,dv.$$

Выражение $|J|\,du\,dv$ называется *элементом площади в криволинейных координатах* u, v. Формула преобразования остается верной и тогда, когда сделанные предположения нарушены вдоль конечного числа кусочно гладких кривых, при условии, что функция $f(x, y)$ и якобиан остаются там ограниченными.

Специальные криволинейные координаты.

1. *Полярные координаты.* Пусть S – область, полученная взаимно однозначным отображением области G плоскости ρ, φ, определяемым функциями $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $|J|=\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)}\right|=\rho$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Пример. $f(x, y)=xy$, и область S – четверть круга: $x^2+y^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; функции $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ также задают область S, являющуюся взаимно однозначным (за исключением отрезка $\rho=0$) образом области

$$G=\{(\rho;\ \varphi)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^R\int\limits_0^{\pi/2}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho=\int\limits_0^R\rho^3\left[-\frac{\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2}d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^R\rho^3\,d\rho=\frac{1}{8}R^4.$$

2. *Обобщенные полярные координаты.* В случае, когда область интегрирования S ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, удобны обобщенные полярные координаты $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$; тогда имеем

$$J=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)}\right|=ab\rho,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dS=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\,ab\rho\,d\varphi\,d\rho.$$

3. Если область S ограничена *астроидой* с параметрическим представлением $x=a\cos^3 t$,

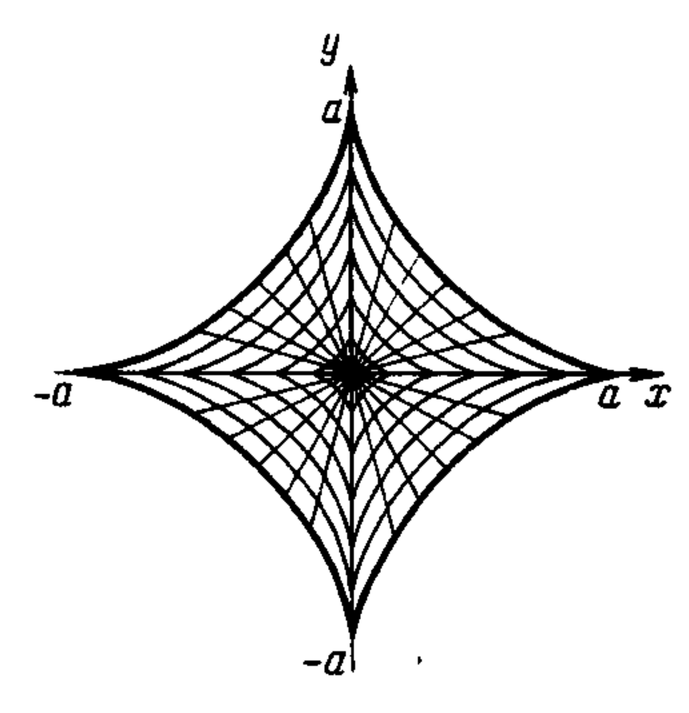


Рис. 3.37

$y=a\sin^3 t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (рис. 3.37), то вводят криволинейные координаты $x=u\cos^3 v$, $y=u\sin^3 v$. Для фиксированного v получаются прямые, проходящие через начало координат; $u=\mathrm{const}$ дает семейство астроид, $J=3u\sin^2 v\cos^2 v$.

3.1.10.4. Геометрические и физические приложения двойных интегралов.

Истолкование двойного интеграла как объема. Если $f(x, y) \geqslant 0$ на S, то двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

интерпретируется как объем цилиндрического тела, основанием которого служит область S плоскости x, y и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$ (рис. 3.38). Если, в частности, $f(x, y) = 1$, то получают объем цилиндра с плоскостью

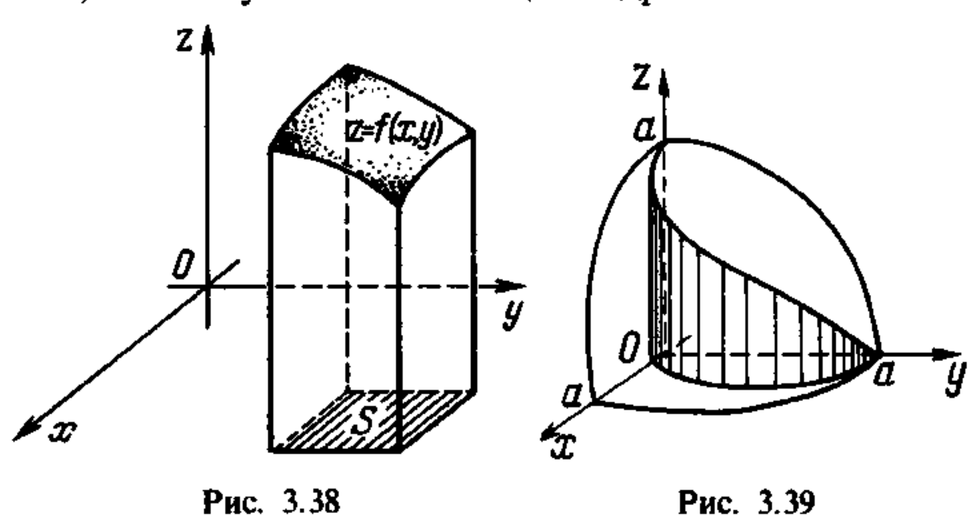


Рис. 3.38 Рис. 3.39

$z = 1$ в качестве верхнего основания. Объем этого цилиндра численно равен площади ΔS области S:

$$\Delta S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy.$$

Примеры. 1) Найти объем цилиндрического тела, в основании которого находится круг $x^2 + y^2 \leqslant ay$, $z = 0$ и которое сверху ограничено частью поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (рис. 3.39). На основании симметрии можно записать, что

$$V = 2 \iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

где S — полукруг $x^2 + y^2 \leqslant ay$, $x \geqslant 0$. В полярных координатах $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ область S описывается неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant a \sin \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, поэтому

$$V = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{a \sin \varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Подставим во внутренний интеграл $t = \sqrt{a^2 - \rho^2}$; имеем

$$V = -2 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_a^{a \cos \varphi} t^2\, dt\, d\varphi = -\frac{2}{3} a^3 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^3 \varphi - 1)\, d\varphi.$$

Используя преобразование $\cos^3 \varphi = \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi$, получаем окончательно

$$V = \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

2) Найти площадь области, ограниченной *астроидой* $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (см. рис. 3.37). В результате введения криволинейных координат $x = u \cos^3 v$, $y = u \sin^3 v$ (см. 3.1.10.3) получаем

$$\Delta S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} 3u \sin^2 v \cos^2 v\, dv\, du = 3 \int\limits_0^a u\, du \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2v\, dv =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4v)\, dv = \frac{3\pi}{8} a^2.$$

Центр тяжести и масса. Координаты ξ и η центра тяжести области S с массой, распределенной с плотностью $\delta(x, y)$, определяются по формулам

$$\xi = \frac{1}{M} \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, x\, dS, \qquad \eta = \frac{1}{M} \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, y\, dS,$$

где M — масса области S: $M = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, dS$.

Момент инерции. Момент инерции I_x плоской области S с массой, распределенной с плотностью $\delta(x, y)$, относительно оси x есть

$$I_x = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, y^2\, dS;$$

момент инерции I_y относительно оси y:

$$I_y = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, x^2\, dS;$$

полярный момент инерции относительно начала координат:

$$I_O = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, (x^2 + y^2)\, dS.$$

3.1.11. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1.11.1. Определение тройного интеграла и простейшие свойства. Пусть задана ограниченная пространственная область *) V, граница которой является кусочно гладкой поверхностью (см. 3.1.12). Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена в области V. Посредством выбора сети кусочно гладких поверхностей строится некоторое разбиение Z области V на конечное число элементарных областей V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с объемами ΔV_i.

Пусть $\Delta(Z)$ — наибольший диаметр элементарных областей V_i, и пусть $M_i(x_i, y_i, z_i)$ — произвольная точка в каждой элементарной области V_i. Число $\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$ называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $M_i \in V_i$.

Функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* по области V, если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$. Число I называется *тройным интегралом* функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается следующим образом:

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV, \qquad I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Этому определению интегрируемости эквивалентно следующее: функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V, если для каждой последовательности Z_n разбиений области V, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta(Z_n) = 0$, последовательность $\sigma(Z_n, \{M_i^{(n)}\})$ интегральных сумм всегда сходится независимо от выбора точек M_i (в этом случае все последовательности

*) См. сноску к 3.1.10.

интегральных сумм сходятся к одному и тому же значению, которое и есть значение интеграла).

Интегрируемые функции.

а) Каждая непрерывная на V функция является интегрируемой по V.

б) Каждая ограниченная на V функция, которая непрерывна на V, за исключением точек, лежащих на конечном числе гладких поверхностей, является интегрируемой по V. Если функция в точках таких поверхностей произвольно изменяется (однако так, что измененная функция остается ограниченной), то значение интеграла не изменится.

Свойства тройных интегралов. Тройные интегралы имеют свойства, соответствующие рассмотренным в 3.1.10.1 для двойных интегралов.

3.1.11.2. Вычисление тройных интегралов.

1. Пусть V является *цилиндрическим* телом, проекция которого на плоскость x, y есть область S и которое ограничено снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$,

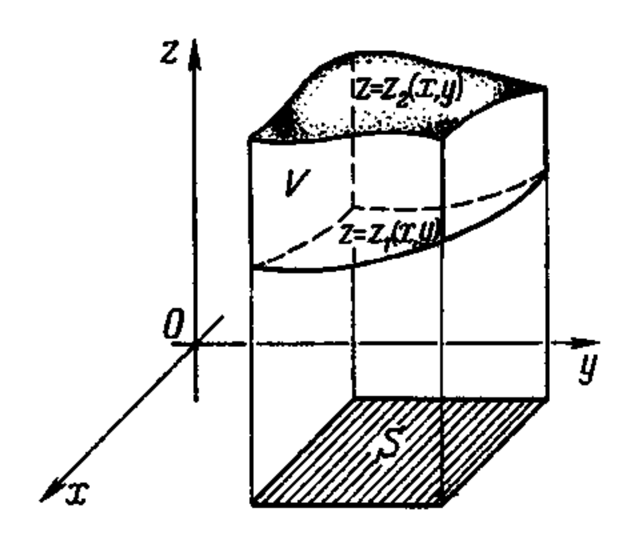


Рис. 3.40

где z_1, z_2 – непрерывные функции в S (рис. 3.40); тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Интегрированием по z тройной интеграл сводится к двойному интегралу по области S.

Если область S плоскости x, y определена при этом неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где y_1, y_2 – непрерывные функции на $[a, b]$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

Пример. Пусть V – тело, ограниченное эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; тогда S состоит из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$; таким образом, имеем

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy,$$

а так как S полностью описывается неравенствами

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

2. Пусть V лежит между плоскостями $x = a$ и $x = b$, а каждая плоскость $x = \text{const}$, где $a \leqslant$

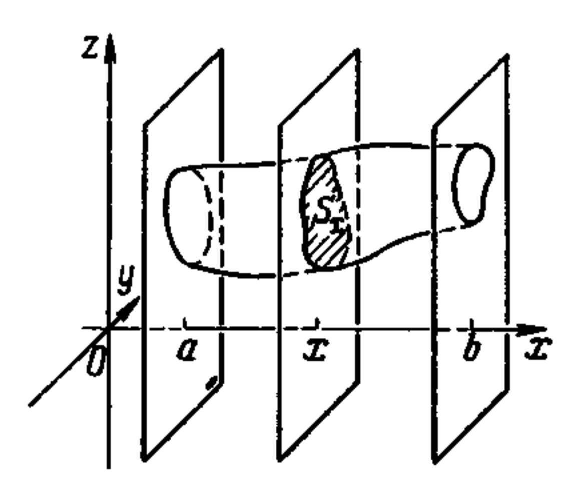


Рис. 3.41

$\leqslant x \leqslant b$, пересекает область V по плоской области S_x (рис. 3.41); тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \Big(\iint\limits_{(S_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz \Big)\,dx.$$

Пример. Пусть V – тело, ограниченное конической поверхностью $R^2x^2 = h^2(y^2 + z^2)$ (рис. 3.42); этот конус лежит

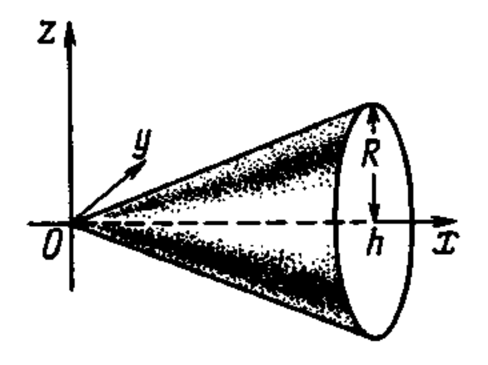


Рис. 3.42

между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, и S_x – круг $y^2 + z^2 \leqslant (Rx/h)^2$. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^h \left(\iint\limits_{(S_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz \right) dx.$$

Если, например,

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

то интеграл по плоской области S_x можно вычислить введением полярных координат $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$:

$$I(x) = \iint\limits_{(S_x)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{Rx/h} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Делаем подстановку $u = \sqrt{\rho^2 + x^2}$:

$$I(x) = 2\pi x \int\limits_x^{x\sqrt{1+(R/h)^2}} du = \frac{2\pi x^2}{h}(l - h), \quad l = \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Поэтому значение искомого тройного интеграла равно

$$\int\limits_0^h I(x)\,dx = \frac{2\pi}{3}h^2(l - h).$$

3.1.11.3. Замена переменных в тройных интегралах. Пусть посредством функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ производится взаимно однозначное отображение открытого множества, содержащего область G пространства u, v, w, ограниченную кусочно гладкими поверхностями, на открытое множество, содержащее область V пространства x, y, z, и V есть образ G при этом отображении. Если эти три функции x, y, z вместе со своими первыми частными производными непрерывны в G и

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то для каждой непрерывной функции $f(x, y, z)$ справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint\limits_{(G)} f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))\, |J|\, du\, dv\, dw.$$

Выражение $|J|\, du\, dv\, dw$ называется *элементом объема в криволинейных координатах u, v, w.*

Эта формула преобразования остается верной также и тогда, когда на конечном числе кусочно гладких поверхностей указанные условия нарушены (если, однако, функция $f(x, y, z)$ и якобиан остаются ограниченными).

Специальные криволинейные координаты.

1. *Сферические координаты.* Пусть область V получена из области G взаимно однозначным отображением $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$; при этом $J = \rho^2 \sin\theta$. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(G)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Элемент объема в сферических координатах есть, таким образом, $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

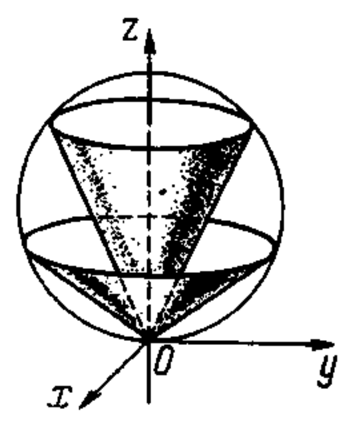


Рис. 3.43

Пример. Пусть V – область в пространстве, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ и двумя коническими поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\alpha$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\beta$ $\left(x < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 3.43). В сферических координатах ρ, φ, θ область V определяется неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\theta$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. Отсюда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{0}^{2a\cos\theta} \int\limits_{0}^{2\pi} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\rho\, d\theta.$$

2. *Обобщенные сферические координаты:* $x = a\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\theta$. Тогда $J = abc\rho^2\sin\theta$.

3. *Цилиндрические координаты:* $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тогда $J = \rho$.

3.1.11.4. Геометрические и физические приложения тройных интегралов.

1. *Объем* пространственной области: в случае частного вида подынтегральной функции $f(x, y, z) = 1$ тройной интеграл по V представляет собой объем ΔV области V:

$$\iiint\limits_{(V)} 1 \cdot dx\, dy\, dz = \Delta V.$$

Пример. Если V – тело, описанное в примере в 3.1.11.3, то его объем равен

$$\iiint\limits_{(V)} 1 \cdot dx\, dy\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{0}^{2a\cos\theta} \int\limits_{0}^{2\pi} \rho^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\rho\, d\theta =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{0}^{2a\cos\theta} 2\pi\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} 8a^3 \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{16\pi}{3} a^3 \left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{4\pi}{3} a^3 (\cos^4\alpha - \cos^4\beta).$$

2. *Масса* тела V. Если пространственная область V заполнена массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, то полная масса V равна

$$M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

3. *Центр тяжести.* Если ξ, η, ζ являются координатами центра тяжести пространственной области, заполненной массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, то

$$\xi = \frac{1}{M} \iiint\limits_{(V)} x\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\eta = \frac{1}{M} \iiint\limits_{(V)} y\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\zeta = \frac{1}{M} \iiint\limits_{(V)} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

4. *Момент инерции.* Моменты инерции пространственной области V, заполненной массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, относительно осей x, y и z равны соответственно

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, \delta\, dV,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\, \delta\, dV,$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, \delta\, dV.$$

Пример. Найти момент инерции относительно оси z тела V, ограниченного круговым цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, которое равномерно заполнено массой с плотностью $\delta = 1$. Введем цилиндрические координаты;

тогда

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, dV = \int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^a \rho^2 \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} a^4\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^h \frac{2\pi}{4} a^4\, dz = \frac{a^4 h\pi}{2} = \frac{a^2}{2} \Delta V,$$

где $\Delta V = \pi a^2 h$ – объем тела V.

5. *Гравитационное притяжение.* Сила гравитационного притяжения $\mathbf{F}$, с которой пространственный объем V, заполненный массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, по закону Ньютона действует на материальную точку $P = (\xi, \eta, \zeta)$ с массой 1, имеет компоненты

$$F_x = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{x - \xi}{r^3} \delta\, dx\, dy\, dz,$$

$$F_y = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{y - \eta}{r^3} \delta\, dx\, dy\, dz,$$

$$F_z = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{z - \zeta}{r^3} \delta\, dx\, dy\, dz,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, γ – гравитационная постоянная.

3.1.12. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кусок поверхности S, заданный в параметрической форме: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где точка (u, v) пробегает некоторую область *) G плоскости u, v, называется *гладким*, если различные пары значений (u, v) дают разные точки S, частные производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны и

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2.$$

Если поверхность S состоит из конечного числа гладких кусков поверхности, то S называется *кусочно гладкой*.

Гладкая поверхность S называется *двусторонней*, если в каждой точке поверхности можно выбрать нормаль так, что при обходе каждой замкнутой кривой, лежащей на S, мы, непрерывно изменяя нормаль при движении по кривой, возвращаемся в исходную точку кривой с тем же направлением нормали. *Стороны* двусторонней поверхности могут быть, таким образом, охарактеризованы направлением соответствующих нормалей. Не двусторонней, т. е. *односторонней поверхностью*, является, например, *лист Мёбиуса* (рис. 3.44).

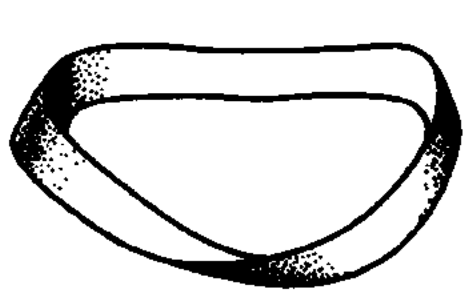


Рис. 3.44

Всюду в дальнейшем под *поверхностью* понимается двусторонняя поверхность.

3.1.12.1. Площадь гладкой поверхности. Пусть поверхность S задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где точка (u, v) пробегает некоторую область Γ плоскости u, v. Тогда площадь ΔS поверхности определяется поверхностным интегралом

$$\Delta S = \iint\limits_{(\Gamma)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$; подынтегральное выражение $dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ называется *элементом поверхности*.

Если S задана явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, причем (x, y) пробегает область S' (проекцию области S на плоскость xOy), то

$$\Delta S = \iint\limits_{(S')} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

где $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$.

Примеры. 1) Найти площадь поверхности части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, высекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = ay$ (см. рис. 3.39).

Параметрическое представление сферической поверхности:

$$x = a \sin\theta \cos\varphi,\quad y = a \sin\theta \sin\varphi,\quad z = a\cos\theta;$$

таким образом, $u = \theta$, $v = \varphi$; находим $E = a^2$, $F = 0$, $G = a^2 \sin^2\theta$; следовательно, $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin\theta$.

Уравнение границы области интегрирования получается подстановкой параметрического представления в уравнение окружности: $\sin\theta = \sin\varphi$. Отсюда получим, что четверть искомой поверхности, лежащая в первом октанте, характеризуется следующими значениями параметров: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $\theta \leqslant \varphi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Следовательно,

$$\Delta S = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\varphi} a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = 4a^2(\pi/2 - 1).$$

2) Кусок поверхности $z = xy$, лежащий над кругом $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, имеет площадь

$$\Delta S = \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant R^2} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Преобразуя этот интеграл при помощи полярных координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим

$$\Delta S = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \rho \sqrt{1 + \rho^2}\, d\rho\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left((1 + R^2)^{3/2} - 1\right).$$

3.1.12.2. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.

Определение поверхностного интеграла 1-го рода. Пусть некоторая функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена на гладкой поверхности S. Пусть Z обозначает некоторое разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) с площа-

*) См. сноску к п. 3.1.10.

дями ΔS_i, $\Delta(Z)$ – наибольший из диаметров элементарных поверхностей S_i и $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка на соответствующей элементарной поверхности ρ_i (рис. 3.45). Число

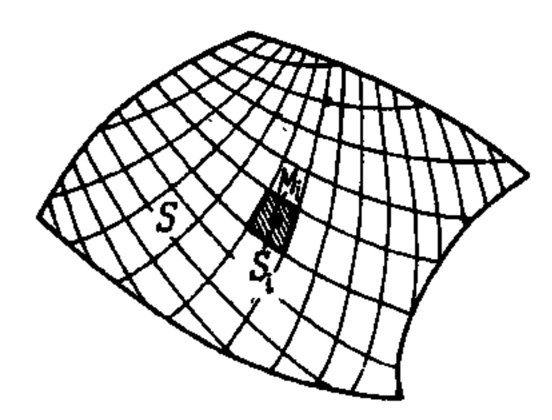


Рис. 3.45

$$\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $\{M_i\}$.

Если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, и независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$, то I называется *поверхностным интегралом 1-го рода* от $f(x, y, z)$ по поверхности S. Обозначение: $I = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS$.

Для случая $f(x, y, z) \equiv 1$ число I равно площади ΔS поверхности S.

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода (сведение к двойному интегралу). Если поверхность задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, причем u и v пробегают область Γ плоскости u, v, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Если поверхность задана явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, причем (x, y) пробегает область S', то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(S')} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

Для случая, если S представлена уравнениями вида $x = \psi(y, z)$ или $y = \chi(x, z)$, верны аналогичные формулы.

Примеры. 1) Пусть поверхность S является сферой радиуса r с параметрическим представлением $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; тогда Γ есть прямоугольник $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = r^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

2) Пусть S – цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$; ее параметрическое представление: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = z$; тогда $\sqrt{EG - F^2} = a$, Γ является прямоугольником $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)\,a\,d\varphi\,dz = a\int\limits_0^{h}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)\,d\varphi\,dz.$$

Определение поверхностного интеграла 2-го рода. Ориентация двусторонней незамкнутой поверхности: выбирается определенная сторона поверхности S; обход замкнутой кривой на S считается согласованным с выбранной стороной, если образуется *правый винт*, т. е. из конца вектора нормали обход кажется происходящим против часовой стрелки.

Пусть в точках поверхности S, однозначно проектирующейся на плоскость x, y и заданной явно гладким уравнением $z = \varphi(x, y)$, определена ограниченная функция $f(x, y, z)$. Пусть Z – разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), $\Delta(Z)$ – наибольший диаметр элементарных поверхностей, $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка, выбранная на элементарной поверхности S_i. Пусть выбрана определенная сторона поверхности, т. е. поверхность S ориентирована. Тогда установленное направление обхода границы каждой элементарной поверхности S_i определяет направление обхода в плоскости x, y границы проекции S_i'. Площадь $\Delta S_i'$ этой проекции берется со знаком плюс, если граница проекции S_i' проходится в положительном направлении; в противном случае – со знаком минус (рис. 3.46). Число

$$\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i'$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $\{M_i\}$. В противоположность образованию интегральных сумм

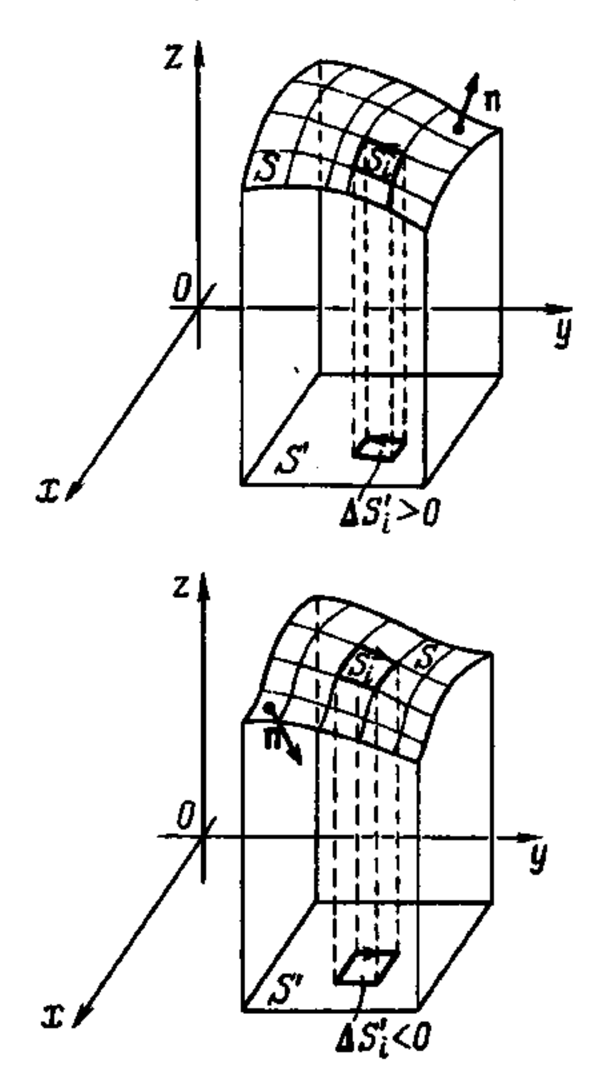


Рис. 3.46

поверхностных интегралов 1-го рода, здесь $f(M_i)$ умножается не на площадь ΔS_i элементарной поверхности S_i, а на ориентированную площадь $\Delta S_i'$ *проекции* S_i' поверхности S_i на плоскость x, y.

Если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$, то

I называют *поверхностным интегралом 2-го рода* от $f(x, y, z)\,dx\,dy$ по ориентированной поверхности S. Обозначение:

$$I = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Если S проектируется на плоскость x, y неоднозначно, но ее можно разбить на конечное число поверхностей, для каждой из которых такая однозначная проекция существует, то поверхностный интеграл по S определяется как сумма интегралов по отдельным поверхностям.

Если S имеет однозначную проекцию на плоскость y, z или x, z, то аналогично можно определить два других поверхностных интеграла 2-го рода:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx,$$

где в соответствующих интегральных суммах стоят площади проекций S_i на плоскости y, z и x, z.

Наконец, для трех функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, определенных на S, эти интегралы можно сложить и определить более общий *поверхностный интеграл 2-го рода:*

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + \iint\limits_{(S)} Q\,dz\,dx + \iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy.$$

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода (сведение к двойному интегралу).

1. Пусть поверхность S имеет явное представление: $z = \varphi(x, y)$, причем (x, y) изменяются в области S', а φ непрерывна в S'. Тогда поверхностный интеграл по той стороне S, для которой угол между нормалью и осью z является *острым*, вычисляется по следующей формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S')} f(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy.$$

Если выбрана другая сторона поверхности, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{(S')} f(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy.$$

Аналогично получаем, что

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_{(S')} f(\psi(y, z), y, z)\,dy\,dz,$$

где поверхность S задана уравнением $x = \psi(y, z)$, S' – проекция S на плоскость y, z, а поверхностный интеграл берется по той стороне, нормаль к которой образует с осью x *острый угол.* Точно так же

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx = \iint\limits_{(S')} f(x, \chi(z, x), z)\,dz\,dx,$$

где поверхность S задана уравнением $y = \chi(z, x)$, S' – проекция S на плоскость x, z, а поверхностный интеграл берется по той стороне, нормаль к которой составляет с осью y *острый угол.*

2. Если поверхность S задана в параметрической форме: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,C\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz = \pm\iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,A\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx = \pm\iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,B\,du\,dv,$$

где

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)};$$

положительный знак перед интегралом справа выбирается тогда, когда ориентация области Γ плоскости u, v соответствует ориентации поверхности (т. е. обход контура на Γ и его образа на поверхности одновременно согласованы с верхней стороной Γ и выбранной стороной поверхности).

Для суммы трех интегралов получаем

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{(\Gamma)} (PA + QB + RC)\,du\,dv.$$

Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода. Если α, β, γ – углы нормали к выбранной стороне поверхности с осями x, y и z, то

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

т. е. стоящий слева поверхностный интеграл 2-го рода преобразуется в стоящий справа поверхностный интеграл 1-го рода.

Для *двух различных незамкнутых* поверхностей S_1 и S_2 с одной и той же границей C (стороны которых согласованы с заданным обходом контура C) поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

имеет в общем случае разные значения (рис. 3.47), т. е. в общем случае он не обращается в нуль на замкнутой поверхности (аналогично зависимости от пути криволинейного интеграла). Если функции P, Q, R, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ непрерывны в «пространственно односвязной» области V (т. е. в области, которая наряду с каждой замкнутой поверхностью содержит также и область, ограниченную этой поверхностью), то поверхностный интеграл по

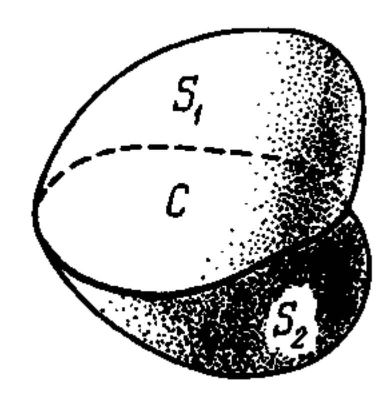


Рис. 3.47

всякой замкнутой поверхности S и V обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

Пример. Пусть (x, y, z) – некоторая точка поверхности S, а (ξ, η, ζ) – точка вне S, и

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Функции $P=\frac{x-\xi}{r^3}$, $Q=\frac{y-\eta}{r^3}$, $R=\frac{z-\zeta}{r^3}$ и их производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны при $(x, y, z)\neq(\xi, \eta, \zeta)$, и имеет место равенство $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$; таким образом, для этих функций интеграл $\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$ равен нулю по каждой замкнутой поверхности, ограничивающей тело, не содержащее точки (ξ, η, ζ).

Переход к поверхностному интегралу 1-го рода:

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{x-\xi}{r^3}dy\,dz+\frac{y-\eta}{r^3}dz\,dx+\frac{z-\zeta}{r^3}dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha+\frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta+\frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma\right)dS.$$

Если $(\mathbf{r}, \widehat{\mathbf{n}})$ – угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки (x, y, z) поверхности и нормалью к S в точке (x, y, z), то

$$\frac{x-\xi}{r}\cos\alpha+\frac{y-\eta}{r}\cos\beta+\frac{z-\zeta}{r}\cos\gamma=$$

$$=\cos(x, \widehat{\mathbf{r}})\cos\alpha+\cos(y, \widehat{\mathbf{r}})\cos\beta+\cos(z, \widehat{\mathbf{r}})\cos\gamma=\cos(\mathbf{r}, \widehat{\mathbf{n}}),$$

так что для поверхностного интеграла получаем, что

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{\cos(\mathbf{r}, \widehat{\mathbf{n}})}{r^2}\,dS.$$

Геометрически этот интеграл представляет собой телесный угол, под которым из точки (ξ, η, ζ) видна поверхность S. Если поверхность S замкнута, то его значение равно 4π, если точка (ξ, η, ζ) лежит внутри области, ограниченной S, и 0, если (ξ, η, ζ) лежит снаружи.

3.1.12.3. Геометрические и физические приложения поверхностного интеграла.

Объем тела. Объем ΔV тела V, ограниченного кусочно гладкой поверхностью S, можно различными способами вычислить как поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\Delta V=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy,\quad\text{или}\quad \Delta V=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz,$$

или

$$\Delta V=\iint\limits_{(S)} y\,dz\,dx,$$

или

$$\Delta V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy,$$

причем интегралы следует брать по внешней стороне поверхности S.

Пример. Пусть пространственная область V ограничена эллипсоидом $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$. Параметрическое представление этой поверхности есть

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cos\theta,$$

где $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ (область Γ плоскости φ, θ). Отсюда, так как

$$C=\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)}=ab\sin\theta\cos\theta,$$

следует, что

$$\Delta V=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy=\iint\limits_{(\Gamma)}\chi(\theta, \varphi)\,C\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} c\cos\theta\,ab\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=abc\cdot 2\pi\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=2abc\pi\int\limits_{-1}^{1}u^2\,du=\frac{4\pi}{3}abc.$$

Центр тяжести и сила притяжения. Если поверхность S покрыта массой с поверхностной плотностью $\delta(x, y, z)$, то полная масса поверхности S равна

$$M=\iint\limits_{(S)}\delta(x, y, z)\,dS;$$

координаты (ξ, η, ζ) центра тяжести равны

$$\xi=\frac{1}{M}\iint\limits_{(S)}x\,\delta(x, y, z)\,dS,\quad \eta=\frac{1}{M}\iint\limits_{(S)}y\delta(x, y, z)\,dS,$$

$$\zeta=\frac{1}{M}\iint\limits_{(S)}z\delta(x, y, z)\,dS;$$

компоненты силы притяжения $\mathbf{F}$ этого распределения массы, действующей на материальную точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ единичной массы, равны

$$F_x=\gamma\iint\limits_{(S)}\frac{x-x_0}{r^3}\,\delta\,dS,\quad F_y=\gamma\iint\limits_{(S)}\frac{y-y_0}{r^3}\,\delta\,dS,$$

$$F_z=\gamma\iint\limits_{(S)}\frac{z-z_0}{r^3}\,\delta\,dS,$$

где γ – гравитационная постоянная.

Пример. Пусть поверхность конуса (см. рис. 3.42) $R^2x^2=h^2(y^2+z^2)$ покрыта массой с плотностью $\delta=1$. Из условия симметрии $\eta=\zeta=0$; так как поверхность S задана уравнением

$$x=\psi(y, z)=\frac{h}{R}\sqrt{y^2+z^2},$$

причем y и z пробегают внутренность круга $y^2+z^2=R^2$, получаем

$$I=\iint\limits_{(S)}x\,dS=\iint\limits_{(y^2+z^2\leqslant R^2)}x\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{h}{R}\iint\limits_{(y^2+z^2\leqslant R^2)}\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\,dy\,dz.$$

После введения в плоскости y, z полярных координат $y=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$ получаем, что

$$I=\frac{h}{R}\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\rho^2\,d\rho\,d\varphi=\frac{2\pi}{3}hR\sqrt{h^2+R^2},$$

а так как $M=\pi R\sqrt{h^2+R^2}$, то $\xi=\frac{2}{3}h$.

3.1.13. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

3.1.13.1. Формула Остроградского – Гаусса. Формула Грина. Пусть пространственная область*) V ограничена кусочно гладкой поверхностью S и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – функции, непрерывные в открытом множестве, содержащем $V \bigcup S$, вместе с производными $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$; тогда справедлива следующая формула (*формула Остроградского – Гаусса*):

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dy\,dx,$$

причем поверхностный интеграл 2-го рода, стоящий справа, следует брать по *внешней стороне* поверхности S, ограничивающей область V.

Формула Грина для плоской области:

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy.$$

Эта формула преобразует двойной интеграл по области S в криволинейный интеграл по границе L области S, причем криволинейный интеграл берется по контуру L, пробегаемому в положительном направлении (рис. 3.48). Эта формула справедлива, если контур L является кусочно гладким, а функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ непрерывны в открытом множестве, содержащем $S \bigcup L$.

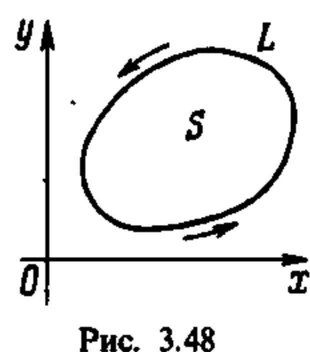


Рис. 3.48

Пример. По формуле Остроградского – Гаусса для $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$ получаем, что

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = 3 \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dV.$$

Если, в частности, S является сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то тройной интеграл после введения сферических координат равен

$$3 \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \rho^2 \sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,d\rho = \frac{12\pi}{5} R^5.$$

3.1.13.2. Формулы Грина. Пусть в открытом множестве G, содержащем пространственную область V, ограниченную кусочно гладкой поверхностью S, заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, непрерывные в области G вместе со своими вторыми частными производными. Тогда справедлива *первая формула Грина* (или подготовительная):

$$\iiint\limits_{(V)} P\,\Delta Q\,dV = \iint\limits_{(S)} P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial Q}{\partial z} \right) dV,$$

где $\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}$, а через $\partial P/\partial \mathbf{n}$ и $\partial Q/\partial \mathbf{n}$ обозначены производные функций P и Q соответственно в направлении *внешней нормали* к S.

При тех же предположениях справедлива *вторая формула Грина*:

$$\iiint\limits_{(V)} (P\,\Delta Q - Q\,\Delta P)\,dV = \iint\limits_{(S)} \left(P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} - Q \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Для случая плоской области эти формулы имеют вид

$$\iint\limits_{(S)} P\,\Delta Q\,dS = \int\limits_{(L)} P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} ds - \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} (P\,\Delta Q - Q\,\Delta P)\,dS = \int\limits_{(L)} \left(P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} - Q \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right) ds,$$

где S – область плоскости x, y; L – ее граница, обходимая в положительном направлении (см. рис. 3.48); $\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}$ и $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}}$ – производные в направлении *внешней нормали* к кривой L; $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$.

3.1.13.3. Формула Стокса. Пусть система координат является правой, пусть кусочно гладкая двусторонняя незамкнутая поверхность S, ограниченная кусочно гладким контуром L, расположена внутри пространственной области V, и пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вместе со своими первыми частными производными непрерывны в V. Тогда справедлива следующая формула (*формула Стокса*):

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx = \int\limits_{(L)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

причем путь интегрирования L проходится так, чтобы направление обхода вместе с нормалью к выбранной стороне поверхности S образовывало правый винт (рис. 3.49).

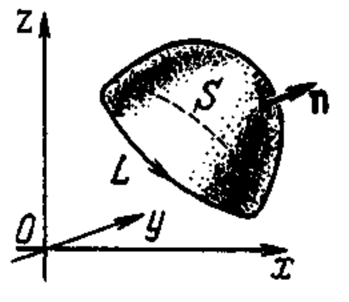


Рис. 3.49

3.1.13.4. Несобственные криволинейные, двойные, поверхностные и тройные интегралы. В случае многомерных интегралов несобственные интегралы можно определить так же, как в одномерном случае. Эти определения аналогичны для криволинейных, двойных, поверхностных и тройных интегралов, и поэтому достаточно их привести, например, для двойных интегралов.

Двойные интегралы от неограниченных функций. Пусть функция $f(x, y)$ не ограничена в окрестности некоторой точки M_0 ограниченной области S и интегрируема по всякой

*) См. сноску к 3.1.10.

области $S \setminus U(M_0)$, где $U(M_0)$ – произвольная окрестность точки M_0. Тогда, если для любой последовательности окрестностей U_n точки M_0, диаметры которых стремятся к 0, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(S \setminus U_n)} f(x, y)\, dx\, dy = I,$$

где $S \setminus U_n$ обозначает область, полученную исключением точек окрестности U_n из S, то I называется *сходящимся несобственным двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по S; обозначение:

$$I = \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Если предел существует не для всякой последовательности U_n, то интеграл $\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$ называется *расходящимся*.

Если в S всегда $f(x, y) \geqslant 0$, то при выборе окрестностей U_n можно ограничиться кругами. Данное определение можно распространить на тот случай, когда $f(x, y)$ не ограничена в окрестностях большего числа точек или в окрестностях гладких кривых.

Пример. Пусть S – круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha/2}$; если $\alpha > 0$, то $f(x, y)$ не ограничена в окрестности начала координат. Так как $f(x, y) \geqslant 0$, то можно ограничиться кругами. Пусть U_n – круги с радиусами ρ_n, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = 0$. Если в области $S \setminus U_n$ введены полярные координаты, то

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(S \setminus U_n)} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \lim_{n \to \infty} \int_{\rho_n}^{1} \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{\rho^\alpha} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\pi \frac{1}{2 - \alpha} \left[\rho^{2-\alpha}\right]_{\rho_n}^{1} = \frac{2\pi}{2 - \alpha} \quad \text{при } 0 < \alpha < 2,$$

в то же время при $\alpha \geqslant 2$ предел не существует; следовательно, при $0 < \alpha < 2$ несобственный интеграл сходится и

$$\iint_{(S)} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{2 - \alpha} \quad \text{при } 0 < \alpha < 2;$$

при $\alpha \geqslant 2$ несобственный интеграл расходится.

Аналогично доказывается, что несобственный тройной интеграл $\iiint_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}}$ по шару V с центром в начале координат сходится, если $0 < \alpha < 3$, и расходится, если $\alpha \geqslant 3$.

Признак сходимости. Если f, g – неотрицательные функции в области S, интегрируемые в дополнениях окрестностей точки M_0, и если в некоторой окрестности точки M_0 функция $f(x, y)/g(x, y)$ остается ограниченной и интеграл $\iint_{(S)} g(x, y)\, dx\, dy$ является сходящимся, то $\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$ также сходится.

В качестве *функции сравнения* можно использовать функцию

$$g(x, y) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{-\alpha/2},$$

где $M_0 = (x_0, y_0)$.

Пример. Область S есть круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, функция $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в окрестности точки $M_0 = (0, 0)$ не ограничена, однако

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Таким образом, функция $f(x, y)/g(x, y)$, где $g(x) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$, остается ограниченной; отсюда следует сходимость интеграла

$$\iint_{(S)} \ln\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Двойные интегралы по бесконечной области. Пусть S – неограниченная область, имеющая границей кусочно гладкую кривую, а $f(x, y)$ – некоторая заданная в S функция, которая интегрируема по каждой конечной подобласти области S. Если для любой последовательности S_n ограниченных подобластей таких, что каждая ограниченная подобласть области S содержится во всех S_n при $n > n_0$, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(S_n)} f(x, y)\, dx\, dy = I,$$

то этот предел I называют *сходящимся несобственным двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по S; обозначение:

$$I = \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Если предел существует не для всякой последовательности S_n, то интеграл $\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$ называется *расходящимся*.

Если $f(x, y) \geqslant 0$ всюду в неограниченной области S, то члены последовательности S_n можно выбрать следующим образом: $S_n = S \cap K_n$, где K_n – круги с центром в начале координат, радиусы которых ρ_n удовлетворяют условию $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = \infty$.

Примеры. 1) Пусть S является областью $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, и пусть $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$. Так как $f(x, y) \geqslant 0$ в S, то в качестве S_n можно взять последовательность четвертей кругов с радиусами ρ_n, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = \infty$. Тогда после перехода к полярным координатам имеем

$$\iint_{(S_n)} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{\rho_n} \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho\, d\varphi\, d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 - e^{-\rho_n^2}),$$

поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(S_n)} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 - e^{-\rho_n^2}) = \frac{\pi}{4},$$

и, следовательно,

$$I = \iint_{(S)} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}.$$

2) Пусть S – первый квадрант, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Если S_n – последовательность четвертей кругов с радиусами ρ_n, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = \infty$, то

$$\iint_{(S_n)} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\rho_n} \int_0^{\pi/2} \sin(\rho^2) \rho\, d\varphi\, d\rho = \frac{\pi}{4}(1 - \cos(\rho_n^2));$$

так как у полученной числовой последовательности предела не существует, то несобственный интеграл $\iint\limits_{(S)} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ является расходящимся.

Наконец, можно определить несобственный двойной интеграл для случая, когда и область интегрирования, и функция $f(x, y)$ (в окрестности некоторых точек) не ограничены.

Замена переменных в несобственных интегралах. Формулы преобразования для двойных интегралов (см. 3.1.10.3) и тройных интегралов (см. 3.1.11.3) остáются в силе (в аналогичных предположениях) также для несобственных интегралов, если хотя бы один из двух интегралов в этих формулах сходится.

Пример. В интеграле

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}},$$

где область S ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, подынтегральная функция в окрестности эллипса не ограничена. Введением обобщенных полярных координат $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$ интеграл преобразуется к следующему виду:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\frac{ab\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho\,d\varphi=ab\int\limits_0^{2\pi}\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1 d\varphi=2\pi ab;$$

следовательно,

$$\iint\limits_{(S)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}=2\pi ab.$$

3.1.13.5. Многомерные интегралы, зависящие от параметра. Пусть S — ограниченная область плоскости x, y; I — интервал ξ-оси, а функция $f(x, y, \xi)$ для каждого $\xi\in I$ интегрируема на S. Тогда для $\xi\in I$ двойной интеграл определяет функцию

$$F(\xi)=\iint\limits_{(S)} f(x, y, \xi)\,dx\,dy.$$

Интеграл, зависящий от параметра ξ, имеет следующие свойства:

1) если функция $f(x, y, \xi)$ *непрерывна*, то функция $F(\xi)$ также непрерывна на I;

2) если, кроме того, $f(x, y, \xi)$ обладает непрерывной частной производной по ξ, то $F(\xi)$ *дифференцируема* на I и

$$F'(\xi)=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f(x, y, \xi)}{\partial\xi}\,dx\,dy.$$

Аналогичные свойства имеют криволинейные, поверхностные и тройные интегралы, зависящие от параметра.

Пример.

$$F(\xi, \eta, \zeta)=\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(x, y, z)}{r}\,dV,$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Пусть функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна в V. Если точка (ξ, η, ζ) не лежит в V, то функция $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}=\frac{x-\xi}{r^3}$ непрерывна в V; следовательно, $F(\xi, \eta, \zeta)$ дифференцируема по ξ и имеет производную

$$\frac{\partial F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi}=\iiint\limits_{(V)}\rho(x, y, z)\frac{x-\xi}{r^3}\,dV.$$

Так как подынтегральное выражение также обладает непрерывной частной производной, то под знаком интеграла можно продифференцировать еще раз; получим

$$\frac{\partial^2 F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi^2}=\iiint\limits_{(V)}\rho(x, y, z)\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right]dV.$$

Аналогично вычисляются частные производные по η и ζ. Сложением получаем, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}=0.$$

Для несобственных криволинейных, двойных, поверхностных и тройных интегралов, зависящих от параметров, как и в одномерном случае (см. 3.1.9.3), непрерывность подынтегрального выражения уже не является достаточным условием для того, чтобы обеспечить непрерывность интеграла по параметру; дополнительно необходима равномерная сходимость этих интегралов.

Равномерная сходимость несобственного двойного интеграла. Пусть $P=(x, y)$ и $M=(\xi, \eta)$ — точки ограниченной области S, а $f(P, M)$ — некоторая заданная в S функция, которая в окрестности $P=M$ не ограничена. Интеграл

$$\iint\limits_{(S)} f(P, M)\,dS_P=\iint\limits_{(S)} f(x, y, \xi, \eta)\,dx\,dy$$

является несобственным интегралом, зависящим от параметров. Он называется *равномерно сходящимся* в точке $M_0\in S$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для *всех* точек M, удаленных от M_0 на расстояние, не превышающее δ, и для *всех* окрестностей U точки M_0, диаметры которых не превышают δ, выполняется неравенство

$$\left|\iint\limits_{(U)} f(P, M)\,dS_P\right|<\varepsilon.$$

Если интеграл $\iint\limits_{(S)} f(P, M)\,dS_P$ сходится равномерно в точке M_0, то функция

$$F(M)=\iint\limits_{(S)} f(P, M)\,dS_P$$

непрерывна в точке M_0.

Пример. Пусть V — некоторая ограниченная область в пространстве x, y, z; $\rho(x, y, z)$ — ограниченная на V функция: $|\rho(x, y, z)|\leqslant C=\mathrm{const}$. Если $P=(x, y, z)$ и $M=(\xi, \eta, \zeta)$ — точки из V, то

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(P)}{r_{MP}}dV_P,\text{ где } r_{MP}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

есть несобственный тройной интеграл, зависящий от точки M. Покажем, что он сходится в каждой точке $M_0\in V$ равномерно, так что функция

$$F(M)=\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(P)}{r_{MP}}dV_P$$